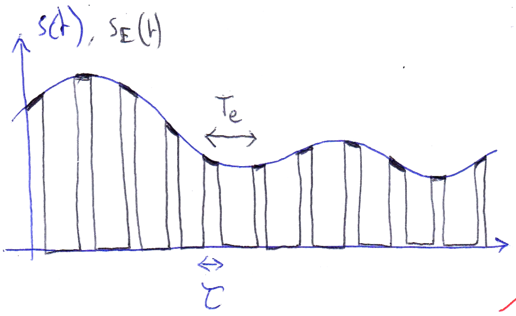
Correction - Interrogation de cours n°2

/10

1 Traitement numérique du signal

• Faire un schéma permettant d'illustrer l'échantillonnage d'un signal analogique $s(t)$ avec un échantillonneur bloqueur. On fera apparaître sur le schéma le signal $s(t)$ d'une couleur, et le signal échantillonné $s_E(t)$ d'une autre couleur. On fera figurer également la période d'échantillonnage T_e, la fréquence d'échantillonnage f_e, et le temps τ pendant lequel le convertisseur analogique-numérique stocke une information sous forme binaire.

/1



$f_e = 1/T_e$ (*)

schéma (*)

• Démontrer le fait qu'il existe une duplication du spectre autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage dans le cas d'un signal $s(t)$ sinusoïdal.

/1,5

Si $s(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$, comme $s_E(t) = s(t) \times p(t)$ avec $p(t)$ un peigne de fréquence périodique de période Te, donc décomposable en série de Fourier sous la forme : $p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n f_e t + \varphi_n)$ (*)

calcul (*)

donc $s_E(t) = A\cos(2\pi f_0 t)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n f_e t + \varphi_n)\right]$

$s_E(t) = A a_0 \cos(2\pi f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A c_n}{2}\left[\cos(2\pi(nf_e + f_0)t + \varphi_n) + \cos(2\pi(nf_e - f_0)t + \varphi_n)\right]$

« signal »

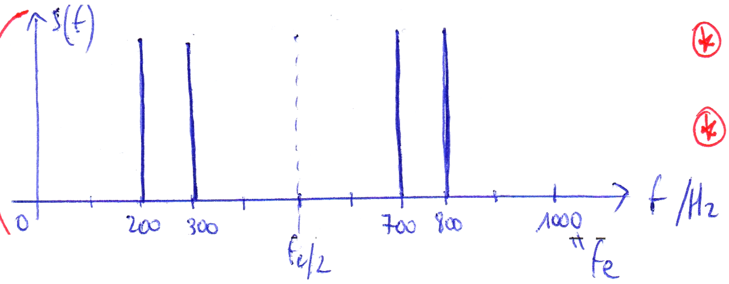
valeurs des fq (*)

duplication du signal aux fréquences $|f_0 + nf_e|$ et $|f_0 - nf_e|$

• *Exemple* : on échantillonne un signal $s(t) = Acos(2\pi f_1 t) + Bcos(2\pi f_2 t)$ avec $A = B = 1\ V$, $f_1 = 300\ Hz$ et $f_2 = 800\ Hz$. Représenter le spectre obtenu avec un analyseur de spectre fonctionnant par FFT avec $f_e = 1000\ Hz$, sur la plage $[0, f_e]$ uniquement, sans chercher à déterminer l'amplitude de chaque pic.

schéma (*)

/1,5



(*) pics à 300 Hz et 800 Hz,

(*) puis à $f_e - f_1 = 1000 - 300 = 700\ Hz$, $f_e - f_2 = 1000 - 800 = 200\ Hz$ → Artéfacts.

• Qu'appelle-t-on la résolution spectrale dans le spectre du signal échantillonné (phrase attendue) ? On donnera la formule qui la lie aux grandeurs caractéristiques de l'échantillonnage.

Résolution spectrale = intervalle minimal entre 2 valeurs de fréquence

2

$$\boxed{\Delta f_{min} = \frac{f_e}{N} = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{\Delta T_{tot}}}$$

• Énoncer le critère de Shannon lors de l'échantillonnage d'un signal analogique. Exemple : on veut échantillonner un signal de fréquence $f_0 = 1\ kHz$, quelle valeur minimale de f_e faut-il prendre ?

Critère de Shannon : $f_e > 2 f_{0,max}$

1,5

si $f_0 = 1\,kHz$, il faut $f_e > 2\,kHz$.

• On veut réaliser le filtrage passe-haut d'un signal numérique $x(t) = \{x_0, x_1, ...x_{N-1}\}$. Donner une relation de récurrence permettant de programmer ce filtrage. Le signal de sortie sera noté $y(t) = \{y_0, y_1, ...y_{N-1}\}$.

Pour un passe haut du premier ordre : $\underline{H} = \frac{K j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)}$ (K = 1 après)

$\Rightarrow j\frac{\omega}{\omega_c}\underline{e}(\omega) = \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)\underline{s}(\omega) \xRightarrow{\text{passage en réel}} \underbrace{\frac{1}{\omega_c}\frac{de}{dt} = s(t) + \frac{1}{\omega_c}\frac{ds}{dt}}_{\text{passage en numérique avec } f_e = 1/T_e}$

2,5

(1) $\frac{1}{\omega_c}\frac{e_n - e_{n-1}}{T_e} = s_n + \frac{1}{\omega_c}\frac{s_n - s_{n-1}}{T_e}$

$\Rightarrow e_n - e_{n-1} = s_n(\omega_c T_e + 1) - s_{n-1}$

$\Rightarrow \boxed{s_n = \frac{s_{n-1}}{1+\omega_c T_e} + \frac{e_n - e_{n-1}}{1+\omega_c T_e} + \text{donnée de } s_0}$

Autre possibilité :

(2) $\frac{1}{\omega_c}\frac{e_{n+1} - e_n}{T_e} = s_n + \frac{1}{\omega_c}\frac{s_{n+1} - s_n}{T_e}$

$\Rightarrow e_{n+1} - e_n = s_{n+1} + s_n(\omega_c T_e - 1)$

$\Rightarrow \boxed{s_{n+1} = s_n(1 - \omega_c T_e) + e_{n+1} - e_n + \text{donnée de } s_0}$