Formulaire d'analyse vectorielle

1 Opérateurs différentiels linéaires

1.1 Coordonnées cartésiennes

Le vecteur déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{\ell}$ séparant deux points $M(x,y,z)$ et $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ s'écrit sous la forme :

$$d\overrightarrow{\ell} = dx\overrightarrow{u}_x + dy\overrightarrow{u}_y + dz\overrightarrow{u}_z$$

Les opérateurs différentiels linéaires usuels sont alors définis par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u}_z \\
\text{div}\ \overrightarrow{a}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\
\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{a}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u}_z \\
\Delta\ f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{a} &= \Delta a_x\overrightarrow{u}_x + \Delta a_y\overrightarrow{u}_y + \Delta a_z\overrightarrow{u}_z
\end{aligned}$$

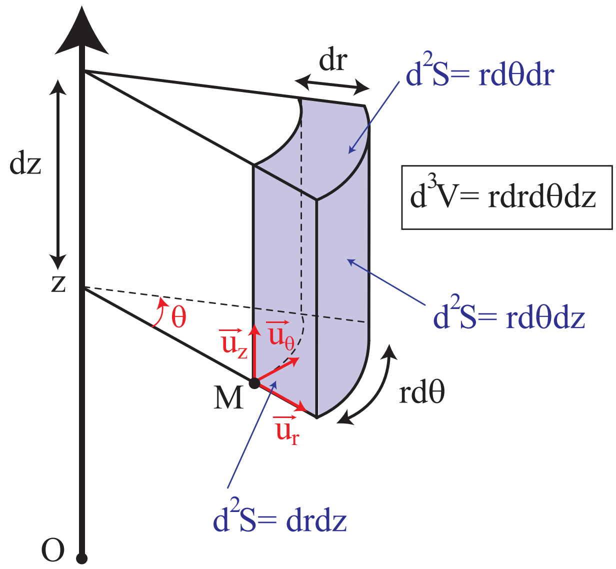
1.2 Coordonnées cylindriques

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$; **Vecteur vitesse** : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$

Vecteur accélération [1] : $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$

Le **vecteur déplacement infinitésimal** $d\vec{\ell}$ séparant deux points $M(r,\theta,z)$ et $M'(r+dr,\theta+d\theta,z+dz)$ s'écrit sous la forme :

$$d\vec{\ell} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$



Les opérateurs différentiels linéaires usuels sont alors définis par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f(r,\theta,z) &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z \\
\mathrm{div}\ \vec{a}(r,\theta,z) &= \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{a}(r,\theta,z) &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z \\
\Delta\ f(r,\theta,z) &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
\vec{\Delta}\vec{a} &= \left[\frac{\partial^2 a_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} - \frac{a_r}{r^2}\right]\vec{u}_r \\
&+ \left[\frac{\partial^2 a_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{r^2}\right]\vec{u}_\theta \\
&+ \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial a_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right]\vec{u}_z
\end{aligned}$$

1. On rappelle que l'accélération radiale décrit la contribution de la courbure de la trajectoire alors que l'accélération tangentielle décrit la variation de la norme du vecteur vitesse. Par ailleurs, le vecteur accélération pointe toujours dans la concavité de la trajectoire.

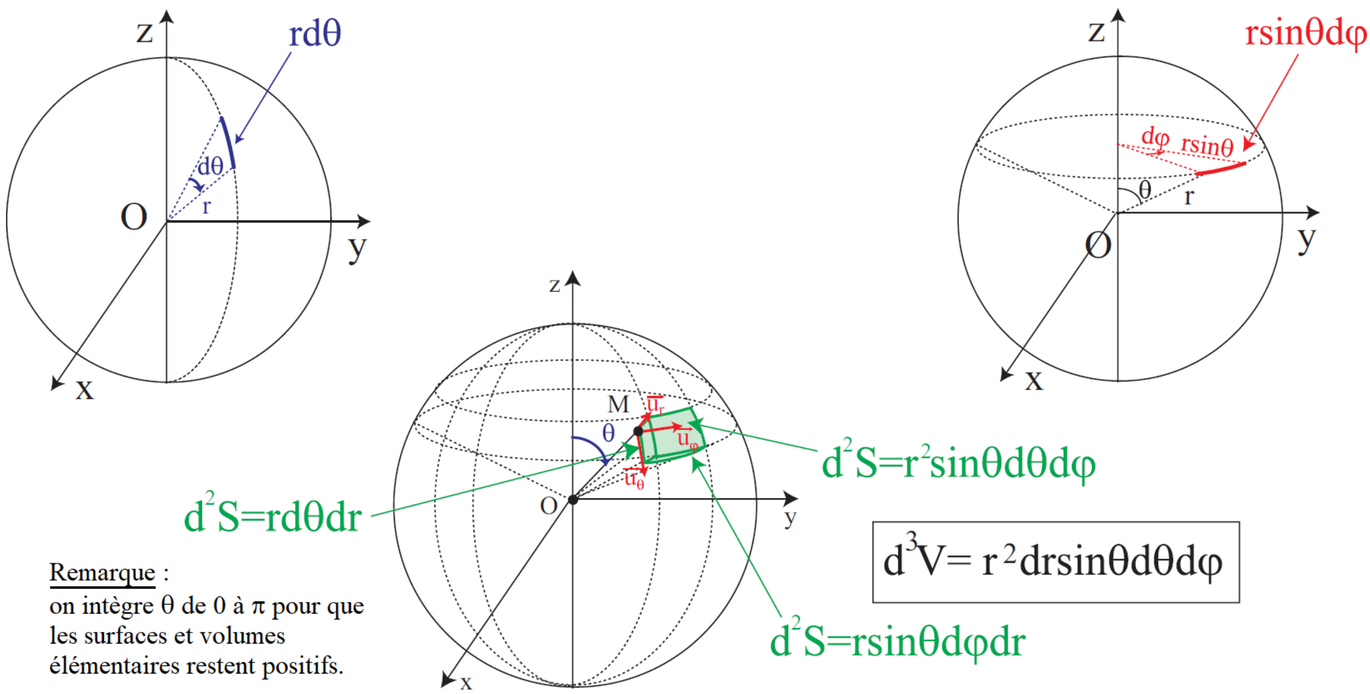
1.3 Coordonnées sphériques

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$; **Vecteur vitesse** : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + rsin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$

Vecteur accélération : à ne pas connaître

Le **vecteur déplacement infinitésimal** $d\vec{\ell}$ séparant deux points $M(r,\theta,\varphi)$ et $M'(r+dr,\theta+d\theta,\varphi+d\varphi)$ s'écrit sous la forme :

$$d\vec{\ell} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\mathrm{sin}\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$



Les opérateurs différentiels linéaires usuels sont alors définis par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f(r,\theta,\varphi) &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\mathrm{sin}\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi \\
\mathrm{div}\ \vec{a}(r,\theta,\varphi) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\mathrm{sin}\theta}\left[\frac{\partial(\mathrm{sin}\theta a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(a_\varphi)}{\partial\varphi}\right] \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{a}(r,\theta,\varphi) &= \frac{1}{r\mathrm{sin}\theta}\left[\frac{\partial(\mathrm{sin}\theta a_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{u}_r + \left[\frac{1}{r\mathrm{sin}\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r}\right]\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]\vec{u}_\varphi \\
\Delta\ f(r,\theta,\varphi) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sin}\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sin}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\Delta}\vec{a} = &\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ra_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 a_r}{\partial\varphi^2} - \frac{2a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial a_\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]\vec{u}_r \\
&+ \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial a_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 a_\theta}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial a_r}{\partial\theta} - \frac{a_\theta}{r^2 sin\theta} - \frac{2cos\theta}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right]\vec{u}_\theta \\
&+ \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial a_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 a_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r^2 sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} + \frac{2cos\theta}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} - \frac{a_\varphi}{r^2 sin^2\theta}\right]\vec{u}_\varphi
\end{aligned}$$

2 Formules d'analyse vectorielle

Quelques formules utiles :

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) &= \vec{b}\cdot(\vec{c}\wedge\vec{a}) = \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\\
\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) &= \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\\
df &= d\vec{\ell}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right) &= \vec{0}\\
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) &= 0\\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \vec{\Delta}\,\vec{a}\\
\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{a} &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\wedge\vec{a}\\
\Delta f &= \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right)\\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}(fg) &= f\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}g + g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\\
\mathrm{div}\,(f\vec{a}) &= \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}f + f\,\mathrm{div}\,\vec{a}\\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\vec{a}) &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}f\wedge\vec{a} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\\
\mathrm{div}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right) &= \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} - \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b}\\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) &= \left(\vec{a}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b}\right) + \left(\vec{b}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) + \left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{b} + \left(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{a}\\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right) &= \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a} + \left(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{a} - \left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{b}
\end{aligned}$$

3 Formes intégrales des théorèmes d'analyse vectorielle

3.1 Théorème de la divergence ou théorème d'Ostrogradsky

Pour toute surface *fermée* (Σ) délimitant un volume (V), avec $\overrightarrow{dS}_{ext}$ un élément de surface orienté vers l'extérieur du volume (V), et pour tout vecteur $\vec{a}$:

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{a}\cdot\overrightarrow{dS}_{ext} = \iiint_{(V)} \mathrm{div}\,\vec{a}\,d\tau$$

3.2 Théorème de Stokes

Pour toute surface *ouverte* (S) délimitée par un contour *fermé* $(\mathcal{C})$ orienté par un déplacement élémentaire $\overrightarrow{d\ell}$, avec $\overrightarrow{dS}_{orientée}$ *orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle de la main droite*, pour tout vecteur $\vec{a}$:

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{a}\cdot\overrightarrow{d\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\cdot\overrightarrow{dS}_{orientée}$$