DM n°4 - Mécanique

À rendre pour le vendredi 4 octobre

1 Pendule simple dans un train en accélération

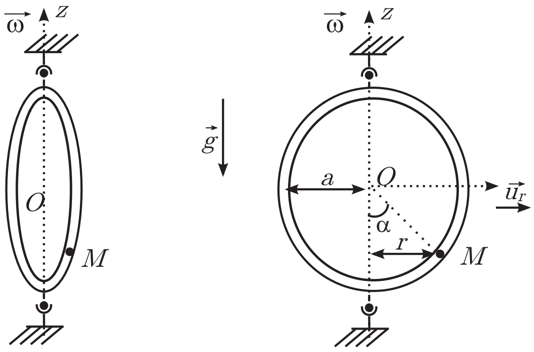
On considère un pendule simple, constitué d'un objet de masse m (considéré comme un point matériel M) attaché à un fil de longueur $\ell = 1\,\text{m}$ dont l'autre extrémité est attachée au plafond d'un wagon. La position du centre de masse du wagon, repérée sur un axe X horizontal, obéit à la loi horaire :
$x = at^2 + bt + c$ avec $a = 3,0\,\text{m.s}^{-2}$, $b = 8,0\,\text{m.s}^{-1}$ et $c = 4,0\,\text{m}$.

1. Quelle est l'inclinaison du fil à l'équilibre pour un voyageur placé dans le wagon ?
2. Le pendule étant en équilibre, un voyageur donne une petite impulsion à M, de sorte qu'il ne soit plus en équilibre. Déterminer l'équation différentielle gérant l'évolution de la position de M. Linéariser cette équation en considérant des mouvements de petite amplitude autour de la position d'équilibre précédente. Quelle sera la période d'oscillation du pendule ?

2 Équilibre d'une bille dans un cerceau creux tournant autour d'un axe vertical

Une bille assimilée à un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement dans un cerceau creux de rayon a qui tourne autour de son axe vertical à la vitesse angulaire constante ω par rapport au laboratoire supposé galiléen.

Le shéma du dispositif est présenté dans la figure ci-contre.



1. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur la bille dans le référentiel R' du cerceau. Déterminer la ou les positions d'équilibre de la bille.
2. Etablir l'expression de l'énergie potentielle de la bille en fonction de l'angle α. Retrouver les positions d'équilibre de la bille et étudier leur stabilité. Tracer l'allure de $E_p(\alpha)$ dans les différents cas étudiés.
3. On s'intéresse à de petites oscillations de l'anneau. Ecrire l'énergie $E_p(\alpha)$ sous la forme d'un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de la position d'équilibre stable centrale. Ecrire la conservation de l'énergie mécanique pour ces oscillations puis en déduire l'équation angulaire du mouvement et la pulsation des oscillations.

Réponses : 2. $E_p(\alpha) = -mga\cos(\alpha) - \dfrac{m\omega^2 a^2 \sin^2(\alpha)}{2}$. 3. $\ddot{\alpha} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\alpha = 0$.

3 Wagon sous la pluie (facultatif)

Un wagon ouvert, de masse m_0, est initialement au repos. A l'instant $t = 0$, il se met à pleuvoir verticalement avec un débit massique D_{m_e} constant. A partir de ce même instant, le wagon est tracté par une force constante de module F.

Déterminer la vitesse $v(t)$ du wagon, sachant qu'il se déplace sans frottement sur une voie horizontale, et que le wagon est plein lorsqu'il a doublé sa masse.

4 Satellite terrestre

La Terre est assimilée à une boule de centre O et de masse M_T. Les mouvements des objets sont étudiés dans le Référentiel Géocentrique ($R_{géo}$) qui sera supposé galiléen. Dans tout le problème, on désignera par G la constante universelle de la gravitation.

I. Relations générales

Un objet ponctuel M de masse m est soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre et on suppose que c'est la seule force qui agit sur celui-ci.

1. Donner l'expression vectorielle $\overrightarrow{F}_g$ de cette force et montrer qu'elle dérive d'une énergie potentielle E_p dont on donnera l'expression en fonction de la distance r entre M et O.
2. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L}$ de M par rapport au centre de la Terre est conservé. Que peut-on en déduire ?

   Le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) et on repère M par ses coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan. On notera dans la suite $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base polaire associée.

3. Montrer que la grandeur $C = r^2\dot{\theta}$ est constante. Dans la suite, cette constante sera appelée *constante des aires*. Que représente physiquement C ?

   Dans les questions qui suivent, on suppose que M a un mouvement circulaire de rayon R autour de O.

4. Exprimer la vitesse v_C de M pour ce mouvement en fonction de G, M_T et R. En déduire son énergie cinétique E_c.
5. Quelle est alors la période T de révolution de M autour de O ? Établir la troisième loi de Kepler qui relie T au rayon R de l'orbite.
6. Montrer que l'énergie mécanique E_m pour ce mouvement circulaire s'écrit $E_m = -\dfrac{GmM_T}{2R}$

II. Étude d'une trajectoire elliptique

Le point M représente un satellite terrestre et on suppose désormais que sa trajectoire dans le plan (Oxy) est elliptique. La distance $r = OM$ varie en fonction de l'angle polaire θ et on appelle ***apogée*** *le point A de l'ellipse le plus éloigné de O et* ***périgée*** *le point P le plus proche de O. On note respectivement r_A et r_P les distances OA et OP.*

Pour la suite on posera $a = \dfrac{r_A + r_P}{2}$ (longueur du demi-grand axe de l'ellipse) et on admettra que, par généralisation du résultat de la question 6., l'énergie mécanique de M s'écrit :

$$E_m = -\frac{GmM_T}{2a}$$

7. On suppose que lors de son passage au point A, à la distance r_A du centre de la terre, M possède une vitesse $v_A = \sqrt{\dfrac{2GM_T}{9r_A}}$.

   a) À l'aide d'un raisonnement énergétique, expliciter la longueur a du demi grand - axe de la trajectoire en fonction de r_A.

   b) Lorsque le satellite passe en P à la distance r_P de O, sa vitesse (en norme) est v_P. En utilisant la conservation du moment cinétique déterminer numériquement les rapports r_P/r_A et v_P/v_A.

8. Arrivé au périgée P, l'équipage allume un moteur qui a pour effet de séparer le satellite en deux parties. La cabine (partie avant) de masse $m/2$ est expulsée et ramène l'équipage vers la Terre. La partie arrière, de masse $m/2$, est mise en orbite circulaire de centre O et de rayon r_P pour constituer une station d'observation. On note $\vec{v}_{cab}$ et $\vec{v}_{stat}$ les vitesses respectives de la cabine et de la station juste après séparation : ces vitesses ont même direction et même sens que $\vec{v}_P$.

   a) La station ayant une trajectoire circulaire, quelle est l'expression de v_{stat} en fonction de G, M_T et r_P ?

   b) La séparation du satellite se faisant en un temps très court, il y a conservation de la quantité de mouvement totale station + cabine. En déduire la vitesse v_{cab} de la cabine juste après la séparation et l'exprimer en fonction de G, M_T et r_P.

   c) Quelle est alors la nature de la trajectoire de la cabine après séparation ?

III. Passage dans la ceinture de Van Allen

Nous considérons à nouveau un satellite M de masse m sur une trajectoire elliptique. Le périgée P de la trajectoire est situé à la distance r_P = 6 870 km et l'apogée A se situe sur l'orbite géostationnaire r_A = 42 370 km. Au cours d'une révolution, le satellite passe dans la ceinture de Van Allen. C'est une ceinture comprise entre deux sphères comprises de rayon R_1 = 8 400 km et R_2 = 28 000 km et dont les centres coïncident avec celui de la Terre. Cette ceinture est constituée de particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre qui perturbent les détecteurs du satellite et interrompent donc ses observations.

9. Faire un schéma de la trajectoire du satellite et de la ceinture de Van Allen.

Dans le système des coordonnées polaires, la trajectoire elliptique est caractérisée par une équation qui donne la distance $r = OM$ en fonction de l'angle polaire θ :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

*dans laquelle p et e sont deux paramètres constants appelés respectivement **paramètre** et **excentricité**.*

10. Donner les expressions de r_A et r_P en fonction de p et e. En déduire que :

$$p = \frac{2\,r_A r_P}{r_A + r_P} \quad \text{et} \quad e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$$

11. Déterminer les valeurs θ_1 et θ_2 correspondant à l'entrée et à la sortie du satellite pour un passage dans la ceinture de Van Allen. Application numérique : calculer les valeurs de ces angles en degrés.
12. Soit A l'aire balayée par le vecteur position lors d'un passage dans la ceinture. Quelle est la relation entre A, la constante des aires C et la durée Δt nécessaire pour balayer cette aire ? En déduire le rapport $\rho = \Delta t/T$ (T période de révolution) en fonction de A et de la surface totale S de l'ellipse.

    On donne : $A = 200\times10^6$ km^2 et $S = \dfrac{\pi p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$. Quel est le pourcentage d'activité du satellite sur une période T ?