Interrogation de cours n°4 - Correction

Note sur 13 :

7

Changements de référentiels

1. Un pendule simple de longueur ℓ, de masse m est placé dans un train ayant une accélération constante $\vec{a}_{train/sol} = a_0 \vec{u}_x$, avec $a_0 > 0$ (attention, ce n'est pas exactement le cas du cours).
   Déterminer l'angle θ_{eq} que fait le pendule avec la verticale, à l'équilibre dans le référentiel du train.
   On appliquera (en énonçant clairement les théorèmes avant de faire les calculs) :
   (a) le théorème du moment cinétique ;
   (b) le théorème de l'énergie mécanique.

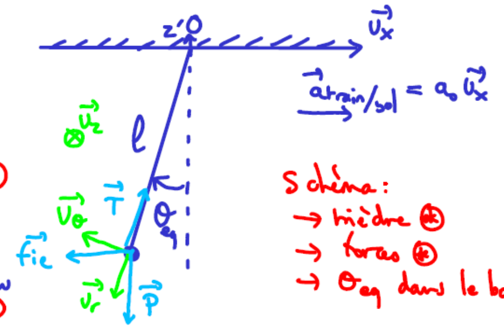


Schéma :
→ trièdre
→ forces
→ θ_{eq} dans le bon sens

a) TMC par rapport à O fixe dans R_{train} non galiléen :

$$\underbrace{\frac{d\vec{L}_O}{dt}}_{=\vec{0} \text{ à l'eq dans } R_{train}} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ie}) + \underbrace{\cancel{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ic})}}_{=\vec{0} \text{ car pas de rotation du train}}$$

or $\begin{cases} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -mg\ell\sin\theta_{eq}\vec{u}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ie}) = ma_0\ell\cos\theta_{eq}\vec{u}_z \end{cases}$ $\Rightarrow 0 = -mg\ell\sin\theta_{eq} + ma_0\ell\cos\theta_{eq}$

$\Rightarrow \boxed{\tan\theta_{eq} = \frac{a_0}{g}}$

b) TPM à M dans R_{train} non galiléen

$$\frac{dE_m}{dt} = \underbrace{\sum \mathcal{P}(\vec{F}_{ext,int\ nc})}_{=\mathcal{P}(\vec{T}) = 0 \text{ car } \vec{T} \perp \vec{v} \text{ dans } R_{train}} + \underbrace{\cancel{\mathcal{P}(\vec{f}_{ic})}}_{\text{toujours nulle}}$$

avec $\vec{f}_{ie}$ comptée dans l'E_p
en effet, $\delta W = -dE_p$
$\Rightarrow -ma_0\vec{u}_x \cdot dx\vec{u}_x = -dE_p \Rightarrow dE_p = ma_0 dx$ et
$E_p = ma_0 x + \cancel{cste}$ (choisie nulle en $x=0$)

d'où $E_m = \frac{1}{2}m\underbrace{v^2}_{=(\ell\dot{\theta})^2} + mgz' + ma_0 x$

z' axe vertical orienté vers le haut avec origine en O $\Rightarrow z' = -\ell\cos\theta$

et $x = -\ell\sin\theta$

donc $\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta - ma_0\ell\sin\theta\right]$

$= m\ell^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta - ma_0\ell\dot{\theta}\cos\theta = 0$ car $E_m = $ cste.

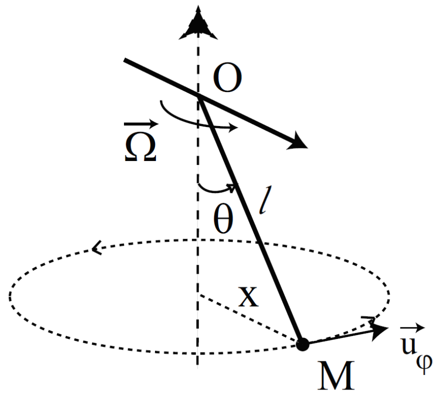
et à l'équilibre dans R_{train} : $\dot{\theta} = 0$ donc $mg\ell\sin\theta = ma_0\ell\cos\theta$

$\Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{a_0}{g}}$

2. Une tige horizontale est mise en rotation uniforme autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{u}_z$ constante. Un pendule simple (point M de masse m relié à un fil sans masse de longueur ℓ) est relié à la tige en O.

   (a) Quel angle fait le pendule avec la verticale lorsque le pendule est au repos dans le référentiel de la tige en rotation en fonction de la vitesse de rotation Ω ?

   (b) Étudier la stabilité de la position d'équilibre - celle de valeur la plus faible seulement - en fonction de la vitesse de rotation Ω_0 par la méthode de votre choix.



(*) On applique le PFD au point M dans le référentiel tournant non galiléen :

(*) $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}}$

$\vec{F_{ic}} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v_r} = -2m\Omega\vec{u_z}\wedge\ell\dot{\theta}\vec{u_\theta} = -2m\Omega\ell\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u_\varphi}$

$(/\!/\vec{u_r} : -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T + m\Omega^2 x\sin\theta)$ inutile ici

(*) $/\!/\vec{u_\theta}$: $m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\Omega^2 x\cos\theta$

$(/\!/\vec{u_\varphi} : mx\ddot{\varphi} = -2m\Omega\ell\dot{\theta}\cos\theta)$ inutile ici

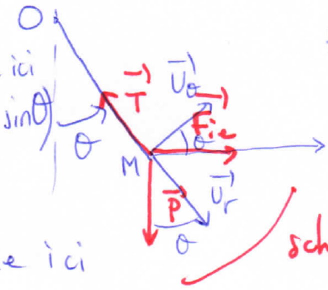


schéma complété (*)

(*) A l'équilibre dans le référentiel tournant, $\theta = \text{cste}$ et $\dot{\varphi} = \Omega = \text{constante}$.

$/\!/\vec{u_\theta}$: $0 = -mg\sin\theta + m\Omega^2\ell\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow 0 = m\sin\theta\left[-\Omega^2\ell\cos\theta - g\right]$ (*)

6

$\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_{eq_1} = 0} \text{ ou } \pi \; (*) \\ \cos\theta = \dfrac{g}{\Omega^2\ell} \Rightarrow \boxed{\theta_{eq_2} = \arccos\left(\dfrac{g}{\Omega^2\ell}\right)} \; (*) \text{ si } \Omega > \sqrt{\dfrac{g}{\ell}} \; (*) \end{cases}$

Etude de la stabilité autour de $\theta_{eq_1} = 0$, on linéarise :

$/\!/\vec{u_\theta} \Rightarrow m\ell\ddot{\theta} \simeq \left[-mg + m\Omega^2\ell\right]\theta$ (*) 1

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\dfrac{g - \Omega^2\ell}{\ell}\right)\theta = 0$ (*) 1 $\Rightarrow \begin{cases} \text{stable si } \Omega^2 < \dfrac{g}{\ell} \; (*) \, 1 \\ \text{instable si } \Omega^2 > \dfrac{g}{\ell} \text{ cohérent} \end{cases}$

avec décollage si rotation rapide.

BONUS +0.5

Autre méthode avec l'énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{1}{2} m \Omega^2 \ell^2 \sin^2\theta - mg\ell\cos\theta$$ ⊛2

$$\Rightarrow \frac{dE_p}{d\theta} = -m\Omega^2\ell^2 \underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{\frac{1}{2}\sin 2\theta} + mg\ell\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_{eq1} \text{ ou } \theta_{eq2}$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -m\Omega^2\ell^2\cos 2\theta + mg\ell\cos\theta \underset{\text{en } \theta_{eq1}=0}{=} m\ell\left[g - \Omega^2\ell\right] > 0 \text{ si } \Omega^2 < \frac{g}{\ell} \text{ stable}$$ ⊛2

< 0 si $\Omega^2 > \frac{g}{\ell}$ instable ⊛2

On retrouve les mêmes résultats.

avec décollage si rotation rapide

BONUS +0.5