Distributions de charges et de courants

Introduction

On rappelle que la physique actuelle parvient à décrire les phénomènes observables à l'aide de quatre interactions dites fondamentales : gravitationnelle, électromagnétique, faible et forte.

L'**interaction électromagnétique** s'exerce avec une portée infinie entre toutes les particules porteuses d'une caractéristique appelée charge électrique. Cette interaction, attractive ou répulsive, est à la base de nombreux phénomènes :
- La cohésion de l'atome résulte des interactions entre les électrons et les protons qu'il contient.
- La liaison chimique permet à des atomes de s'associer, par l'intermédiaire d'électrons, pour former des molécules.
- La cohésion de la matière condensée est due à des interactions électromagnétiques (cristaux ioniques, liaisons de Van der Waals ...)
- Le contact entre solides et les forces de frottement sont décrits par des interactions électromagnétiques au niveau microscopique.
- La lumière et tous les phénomènes optiques sont décrits grâce aux ondes électromagnétiques ....

On appelle **électromagnétisme** l'étude de l'ensemble des phénomènes liés aux interactions entre particules chargées. L'objet d'étude le plus général est un ensemble $\mathcal{D}$ de particules chargées fixes ou en mouvement à la l'intérieur d'un conducteur. Cet ensemble est désigné sous le nom de *distribution de charges et de courants.*

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à l'**électrostatique** et à la **magnétostatique**. Ces disciplines étudient le champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé par une distribution de charges *fixes* par rapport au référentiel d'étude et le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé par une distribution de courants constants. Les champs ainsi créés sont *indépendants du temps* (permanents ou encore statiques).

L'**électromagnétisme en régime variable** sera abordée ensuite. Les champs électrique et magnétique dépendront du temps et ne seront plus indépendants l'un de l'autre (une variation de $\overrightarrow{E}$ modifie $\overrightarrow{B}$ et inversement). Ce couplage est décrit par un ensemble d'équations appelées équations de Maxwell. Nous ferons le lien avec le phénomène d'induction électromagnétique vu en première année.

I La charge électrique

I.1 La grandeur charge électrique

On appelle **charge électrique** d'une particule une grandeur qui caractérise les interactions électromagnétiques qu'elle exerce et qu'elle subit. La charge est une grandeur scalaire pouvant être positive ou négative.

I.2 Quantification de la charge

Les expériences fondamentales de la fin du XIXème siècle menées notamment par J.J.Thomson (découverte de l'électron), J.Perrin et Rutherford (découverte de proton et modèle planétaire de l'atome) ont montré que la matière était formée de particules élémentaires : un noyau contenant des protons [1], et des électrons. Les protons et les électrons sont des particules portant des charges de signes opposés :

$$q = \pm e = \pm 1,6.10^{-19}\ C$$

où e est la *charge élémentaire* (ou quantum de charge).

La matière étant formée de ces particules élémentaires [2], toutes les particules connues ont une charge de la forme : $q = Z\,e$ où Z est un entier relatif.

1. La découverte du neutron par Chadwick permettant d'expliquer la stabilité du noyau date de 1932.
2. En réalité, si l'électron reste une particule élémentaire à ce jour, on sait que le proton - comme le neutron - est constitué de *quarks* de charges fractionnaires depuis la découverte de Gell-Mann dans les années 1960.

I.3 Conservation et invariance de la charge

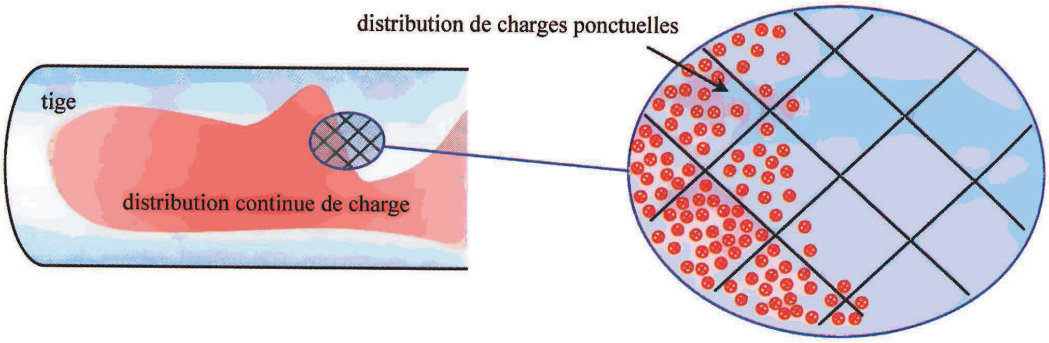
L'ensemble des expériences d'électromagnétisme indiquent que la charge totale d'un système isolé est constante au cours du temps : on parle de **conservation de la charge**.

De plus, la charge totale d'un système a la même valeur, quel que soit le référentiel dans lequel on la mesure : on parle d'**invariance de la charge**.

II Distributions de charges

II.1 Modélisation : du microscopique au macroscopique

A l'échelle **microscopique**, on peut décrire la matière comme un ensemble de particules, considérées comme ponctuelles, et possédant une charge finie multiple de la charge élémentaire e. La matière apparaît comme *discontinue* et essentiellement formée de vide.



D'une distribution macroscopique continue à une distribution microscopique.

Pour étudier un objet de taille **macroscopique**, cette description ne convient pas (impossibilité de connaître le mouvement de toutes ces particules). On utilise alors des *grandeurs moyennes*, comme en thermodynamique.

Néanmoins, si l'objet n'est pas homogène (même composition, même charge en tout point de cet objet ...), il faut choisir une taille intermédiaire entre le microscopique et le macroscopique pour décrire, par exemple, la charge en un point de l'objet.

Cette échelle intermédiaire est appelée échelle **mésoscopique**. Elle est suffisamment grande pour qu'il y ait encore un grand nombre de particules dans un volume mésoscopique : on peut ainsi y définir une *charge moyenne*. De plus, cette échelle est suffisamment petite pour que l'objet y soit homogène.

On ne s'intéresse plus au caractère discret de la répartition de la charge, mais seulement à la charge totale moyenne par unité de volume, appelée **densité volumique de charge** ou **charge volumique**.

II.2 Charge volumique

Pour un milieu chargé de volume V, la *distribution de charge* est définie par la donnée de la **charge volumique**

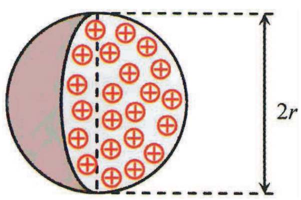
$$\rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$$

à l'intérieur du milieu. Cette densité volumique de charge s'exprime en C.m^{-3}. Le milieu est *chargé uniformément* si ρ ne dépend pas du point considéré.

Par exemple, dans un petit volume noté $\delta\tau$ autour d'un point P de coordonnées $P(x_p, y_p, z_p)$, il y a une charge δq telle que :

$$\delta q = \rho(P)\,\delta\tau = \rho(x_p, y_p, z_p)\,\delta\tau$$

Remarque : le petit volume $\delta\tau$ peut également être noté $d\tau$, comme une petite variation de volume. En revanche δq n'est pas une petite variation et on le notera toujours avec un δ.



Si l'on veut calculer la charge totale de ce volume on aura donc :

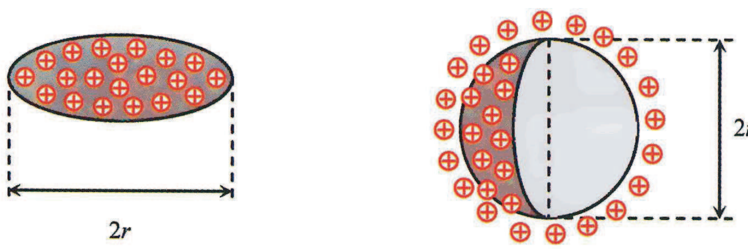
$$\boxed{Q = \iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\tau}$$

II.3 Charge surfacique

Pour un milieu chargé présentant l'aspect d'une nappe d'épaisseur négligeable et de surface Σ, on définit la **densité surfacique de charge** (ou **charge surfacique**)

$$\sigma(\vec{r}) \;=\; \sigma(x,y)$$

présente à la surface de ce milieu. Cette charge surfacique s'exprime en C.m^{-2}. Le milieu est *chargé uniformément* si σ ne dépend pas du point considéré.



Disque uniformément chargé en surface. Boule uniformément chargée en surface.

Par exemple, sur une petite surface notée dS autour d'un point P de coordonnées $P(x_p,y_p)$, il y a une charge δq telle que :

$$\delta q = \sigma(P)\,\mathrm{d}S = \sigma(x_p,y_p)\,\mathrm{d}S$$

Remarque : Il s'agit d'un cas limite de la charge volumique. Soit un petit volume $\mathrm{d}\tau$ *dont la base a une surface* $\mathrm{d}S$ *et de hauteur* h*. La charge dans ce volume est :* $\delta q = \rho\,\mathrm{d}\tau = \rho\,\mathrm{d}S\,h = \sigma\,\mathrm{d}S$.
On a donc $\sigma = \rho\,h$ *pour* h *tendant vers 0 et* ρ *tendant vers l'infini.*

Si l'on veut calculer la charge totale de cette surface, on aura donc :

$$\boxed{Q = \iint_\Sigma \sigma(x,y)\,\mathrm{d}S}$$

II.4 Charge linéique

Pour un milieu chargé présentant l'aspect d'un fil de diamètre négligeable et de longueur L, on définit la **densité linéique de charge** (ou **charge linëïque**)

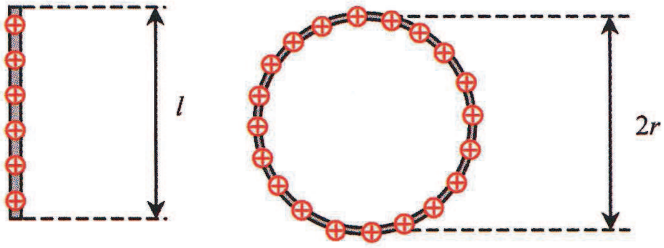
$$\lambda(\vec{r}) = \lambda(x)$$

sur ce milieu. Cette charge linéique s'exprime en C.m^{-1}. Le milieu est *chargé uniformément* si λ ne dépend pas du point considéré.

Par exemple sur une petite longueur notée dℓ autour d'un point P de coordonnées $P(x_p)$, il y a une charge δq telle que :

$$\delta q = \lambda(P)\,\mathrm{d}\ell = \lambda(x_p)\,\mathrm{d}\ell$$

Remarque : Il s'agit d'un cas limite de la charge surfacique et donc de la charge volumique. Soit un petit volume $\mathrm{d}\tau$ *dont la base a une surface* S *et de hauteur* $\mathrm{d}\ell$*. La charge dans ce volume est :* $\delta q = \rho\,\mathrm{d}\tau = \rho\,S\,\mathrm{dl} = \lambda\,\mathrm{d}\ell$
On a donc $\lambda = \rho\,S$ *pour* S *tendant vers 0 et* ρ *tendant vers l'infini.*



Une tige et un anneau uniformément chargés.

Si l'on veut calculer la charge totale de ce fil, on aura donc :

$$\boxed{Q = \int_L \lambda(x)\,\mathrm{d}\ell = \int_L \lambda(x)\,\mathrm{d}x}$$

III Le courant électrique

IV Symétries des distributions de charges et de courants

Les exemples pris ci-dessous font référence aux charges, mais les résultats présentés ici sont généralisables aux courants (on fera attention à ne pas oublier qu'un courant est orienté et que les symétries tiennent compte de cette orientation).

IV.1 Symétries usuelles

a) Symétrie plane

On dit qu'il existe une **symétrie plane** (pour une distribution de charges) si, quels que soient deux points P et P' symétriques par rapport à un plan Π, on a : $\delta q(P) = \delta q(P')$

b) Anti-symétrie plane

On dit qu'il existe une **anti-symétrie plane** (pour une distribution de charges) si, quels que soient deux points P et P' symétriques par rapport à un plan Π^*, on a : $\delta q(P) = -\delta q(P')$

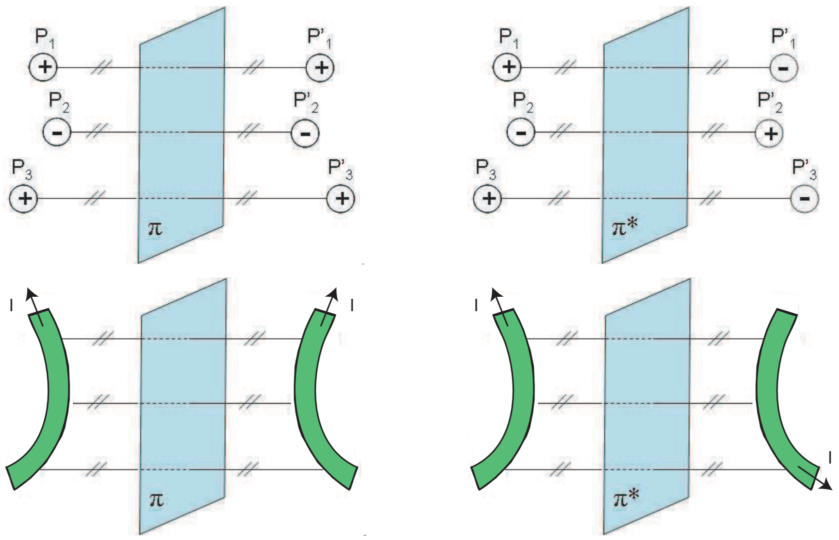
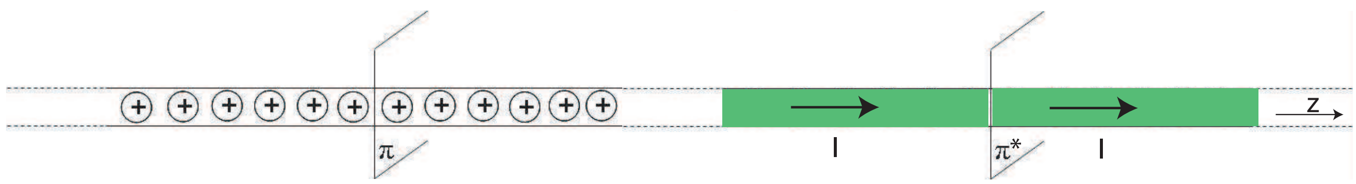


FIGURE 1 – *(A gauche) Plan de symétrie. (A droite) Plan d'anti-symétrie*

IV.2 Invariances usuelles

a) Invariance par translation

On dit qu'une distribution de charges est ***invariante par translation*** d'axe Oz si elle reste inchangée par toute translation d'axe Oz : quel que soit le point P, tous les points P' obtenus par translation d'axe Oz vérifient : $\delta q(P) = \delta q(P')$



Pour avoir une telle invariance, il faut donc que la distribution de charge soit **infinie** dans la direction de l'axe. Elle est de plus indépendante de la position z où l'on se trouve : $\delta q(x, y, z) = \delta q(x, y)$

Pour une telle distribution, **tout plan perpendiculaire à l'axe est plan de symétrie pour une distribution de charges, mais plan d'antisymétrie pour une distribution de courants**. On a donc une infinité de symétries ou d'antisymétries planes.

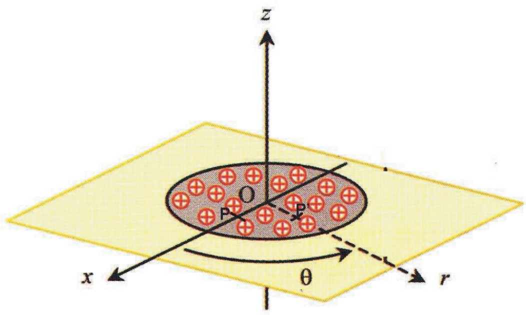
b) Invariance par rotation

> On dit qu'une distribution de charges est **invariante par rotation** d'axe Oz si elle reste inchangée par toute rotation autour de l'axe Oz : quel que soit le point P, tous les points P' obtenus par rotation de P autour de Oz vérifient : $\delta q(P) = \delta q(P')$

Pour une telle invariance, la distribution de charge est forcément **indépendante de l'angle** θ. En utilisant des coordonnées cylindrique, on a donc :

$$\delta q(r, \theta, z) = \delta q(r, z)$$

Pour une telle distribution, **tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie**. On a donc une infinité de symétries planes.



IV.3 Symétries multiples

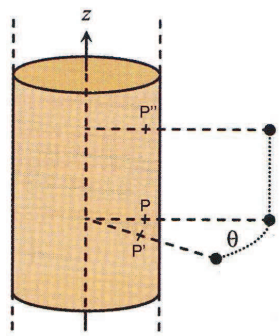
a) Symétrie cylindrique

> On dit qu'une distribution a une **symétrie cylindrique** d'axe Oz s'il existe :
> - **une invariance par translation** suivant Oz (tout plan perpendiculaire à l'axe est donc plan de symétrie)
> - **une invariance par rotation** autour de Oz (tout plan contenant Oz est donc plan de symétrie).

Pour une telle invariance, la distribution de charge est **indépendante de l'angle θ et de la hauteur z.** et ne dépend que de la distance à l'axe Oz :

$$\boxed{\delta q(r, \theta, z) = \delta q(r)}$$

Pour une telle distribution on utilisera toujours les coordonnées cylindriques d'axe Oz.



b) Symétrie sphérique

> On dit qu'une distribution a une **symétrie sphérique** s'il existe une invariance par rotation autour de tous les axes passant par le centre de symétrie O.

Pour une telle invariance, la distribution de charge **est indépendante des angles θ et** φ et ne dépend que de la distance au point O :

$$\boxed{\delta q(r, \theta, \varphi) = \delta q(r)}$$

Pour une telle distribution on utilisera toujours un système de coordonnées sphériques de centre O.