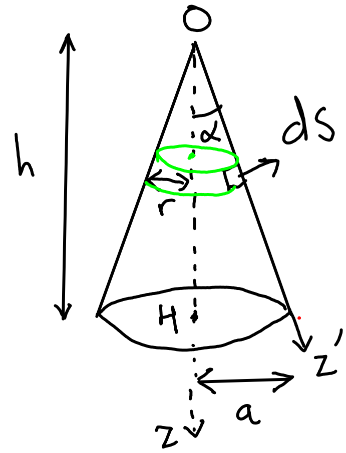
TD n°3bis - Correction des exercices en autonomie

1 Périmètre, surface et volume

Surface latérale du cône :



$dS = 2\pi r\, dz'$ avec $r = z \tan\alpha$

et $\tan\alpha = \frac{a}{h}$ donc $r = z\frac{a}{h}$

et $z' = \frac{z}{\cos\alpha}$

donc $dS = 2\pi z \frac{a}{h} \frac{dz}{\cos\alpha}$

$$\Rightarrow S = \frac{2\pi a}{h\cos\alpha}\int_{z=0}^{h} z\, dz = \frac{2\pi a h^2}{2h\cos\alpha} = \frac{\pi a h}{\cos\alpha}$$

or $\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{S = \pi a\sqrt{h^2+a^2}}$

Volume du cône :

$$dV = \underbrace{\pi r^2}\, dz = \pi \frac{a^2}{h^2} z^2\, dz$$

on a déjà intégré sur des "galettes" sphériques. en vert

$$\boxed{V = \pi\frac{a^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi a^2 h = \frac{1}{3}\text{Base} \times h}$$

2 Conduite sur de la "tôle ondulée"

1. A l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M dans le référentiel terrestre assimilé à un référentiel terrestre s'écrit :

$$0 = -mg - k(\ell_{eq} - \ell_0)$$

On en déduit : $\boxed{\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$. On vérifie bien que $\ell_{eq} < \ell_0$. De plus, l'application numérique conduit à $\ell_0 - \ell_{eq} = 1mm$, ce qui veut dire que la moto comprime les amortisseurs de la fourche de seulement 1mm, ce qui est une valeur assez faible, mais raisonable.

2. La moto se déplaçant à vitesse constant v, sa position suivant la direction est donnée par $x = vt$, où l'origine des x est prise à $t = 0$. On en déduit que $\boxed{z_O(t) = a\cos(\frac{2\pi v}{\lambda}t)}$. La vitesse verticale de la roue est donc donnée par $\boxed{\dot{z}_O(t) = -\frac{2\pi av}{\lambda}\sin(\frac{2\pi v}{\lambda}t)}$.

3. Le PFD s'écrit maintenant, avec $\ell = z - z_O + \ell_{eq}$:

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - z_O + \ell_{eq} - \ell_0) - \alpha(\dot{z} - \dot{z}_O)$$

En réordonnant l'équation, on obtient :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_O + \frac{\alpha}{m}\dot{z}_O}$$

On obtient donc une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre. Le régime transitoire correspond à la solution de l'équation homogène associée, et correspond à une solution exponentiellement amortie avec un temps caractéristique $\boxed{\tau = \frac{2m}{\alpha}} = 0.08\ s$. La pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité sont donnés par : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 100 rad.s^{-1}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} = 4$.

4. En régime permanent, après quelques secondes de route bosselée, on cherche l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical du point M de la moto. On utilise la notation complexe, pour laquelle on pose $\underline{z_O} = ae^{j\omega t}$ et $\underline{z}(t) = z_m e^{j\varphi}e^{j\omega t}$, avec $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$ et on obtient :

$$\frac{z_m e^{j\varphi}}{a} = \frac{\frac{k}{m} + j\omega\frac{\alpha}{m}}{-\omega^2 + j\omega\frac{\alpha}{m} + \frac{k}{m}} = \frac{1 + j\frac{u}{Q}}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}}$$

5. A faible vitesse, $u \to 0$ et $\frac{z_m e^{j\varphi}}{a} \to 1$, et la moto suit les oscillations du sol.

   A grande vitesse, $u \to \infty$ et $\frac{z_m e^{j\varphi}}{a} \to 0$, la moto ne subit plus les oscillations de la route, qui sont amorties par les suspensions.

6. Sachant que la résonance des amortisseurs correspond à $u = \sqrt{-Q^2 + Q\sqrt{Q^2+2}} = 0.9$. Il est donc préférable de rouler à une vitesse telle que $\omega > 0.99\omega_0 \simeq 100 rad.s^{-1}$. Or $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$, donc il est préférable de rouler à une vitesse telle que $v > 4m.s^{-1} = 14km.h^{-1}$. A $30km.^{1}$ par exemple, la moto ne subira presque plus les secousses.

7. Plus la fourche est dure, plus ω_0 est grand, et plus la vitesse qu'il faudra adopter pour limiter les oscillations de la moto est grande. On a donc intérêt à utiliser une "fourche molle" lorsque la route est bosselée.

3 Mise en orbite d'un satellite

1. $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r_B}$, or $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_B}}$ car le mouvement est circulaire, donc : $E_{\mathrm{mB}} = -\frac{GM_{\mathrm{T}}m}{2r_{\mathrm{B}}} = -2,85.10^{10}$ J. L'énergie est bien négative pour un mouvement circulaire.
2. La distance d qui sépare le satellite de l'axe de rotation de la Terre vaut $d = R_T cos\lambda$, et la vitesse du satellite à la surface de la Terre vaut donc

$$v = \omega d = \frac{2\pi R_T cos\lambda}{T} = \frac{2\pi * 6 * 10^6 * 1}{86164} \simeq 400 m.s^{-1}$$

   On a pris le cas de l'équateur. On obtient finalement : $E_{\mathrm{S}} = -\frac{GM_{\mathrm{T}}m}{R_{\mathrm{T}}} + \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R_{\mathrm{T}}\cos\lambda}{T}\right)^2$. Cette énergie est maximale lorsque $cos\lambda = 1$, donc au niveau de l'équateur. Cela explique pourquoi les centres de lancement sont proches de l'équateur (Kourou en Guyane pour la France, Cap Canaveral en Floride pour les Etats-Unis).
3. (a) Tous les satellites tournent autour du centre G de la Terre. Pour rester à la verticale d'un point qui ne se trouve pas à l'équateur, un satellite devrait effectuer son orbite autour du point H appartenant à l'axe de rotation de la Terre, mais différent de G. Les satellites géostationnaires sont donc nécessairement placés dans le plan équatorial.

   (b) En écrivant l'égalité des vitesses angulaires de la Terre et du satellite géostationnaire, on obtient : $r_{\mathrm{G}} = \left(\frac{T^2 GM_{\mathrm{T}}}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 42,2.10^6$ m. Cela correspond ainsi à une altitude par rapport au centre de la Terre de 35 800 km.

   (c) $E_{\mathrm{mG}} = -\frac{GM_{\mathrm{T}}m}{2r_{\mathrm{G}}} = -4,73.10^9$ J. On vérifie bien qu'on trouve à nouveau une énergie négative pour un mouvement circulaire. L'énergie est plus proche de 0 car le satellite est plus loin de l'astre attracteur.
4. (a) Le demi-grand axe de l'ellipse vérifie $2a = r_B + r_G$, or l'énergie mécanique d'un mouvement elliptique est donnée par $E_m = \frac{-GM_T m}{2a}$, donc $E_{\mathrm{mT}} = -\frac{GM_{\mathrm{T}}m}{r_{\mathrm{B}}+r_{\mathrm{G}}} = -8,11.10^9$ J ; Il faut ainsi fournir de l'énergie au satellite au périgée, puis à l'apogée de l'ellipse de transfert. Ce sont les seuls instants où les moteurs doivent être allumés.

   $\Delta E_{\mathrm{m1}} = E_{\mathrm{mT}} - E_{\mathrm{mB}} = 2,04.10^{10}$ J ; $\Delta E_{\mathrm{m2}} = E_{\mathrm{mG}} - E_{\mathrm{mT}} = 3,38.10^9$ J.

   (b) En utilisant la troisième loi de Kepler, on obtient : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$, or la durée du transfert correspond à la moitié de la période elliptique, donc $\Delta t = \pi\sqrt{\frac{(r_{\mathrm{B}}+r_{\mathrm{G}})^3}{8GM_{\mathrm{T}}}} = 5,33$ h.