

Électrostatique

Table des matières

I Champ électrostatique

- I.1 Loi de Coulomb
- I.2 Champ électrostatique d'une charge ponctuelle
- I.3 Analogies avec la force de gravitation et le champ gravitationnel
- I.4 Principe de superposition
- I.5 Champ créé par une distribution de charges

II Structure et propriétés du champ électrostatique

- II.1 Lignes de champ
- II.2 Propriétés de symétrie du champ électrostatique
- II.3 Propriétés d'invariance du champ électrostatique
- II.4 Cas particulier des symétries multiples

III Potentiel électrostatique

- III.1 Potentiel d'une charge ponctuelle
- III.2 Intermède mathématique : la fonction gradient
- III.3 Signification concrète du potentiel - lien avec l'énergie potentielle
- III.4 Unités et ordres de grandeur
- III.5 Circulation du champ électrostatique

IV Théorème de Gauss

- IV.1 Flux du champ électrostatique
- IV.2 Énoncé du théorème de Gauss
- IV.3 Analogie du théorème de Gauss en gravitation
- IV.4 Exemples d'application

Introduction

On rappelle que l'électrostatique s'intéresse aux phénomènes correspondant à des *distributions de charges fixes dans le référentiel d'étude*.

I Champ électrostatique

I.1 Loi de Coulomb

Coulomb, suite à une longue série d'expériences, énonce en 1785 la loi d'interaction entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 , respectivement situées en M_1 et M_2 , qui peut se mettre sous la forme :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M_1 M_2}}{\|M_1 M_2\|^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

où ϵ_0 est la **permittivité diélectrique du vide** telle que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ S.I.



On rappelle que deux charges de même signe se repoussent et deux charges de signes opposés s'attirent.

I.2 Champ électrostatique d'une charge ponctuelle

La force exercée par la charge 1 sur la charge 2 peut aussi s'écrire : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \times \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$

Cette forme est intéressante car elle comporte une partie qui ne dépend que de la charge 1 et que l'on nomme le **champ électrostatique créé par la charge 1**, noté \vec{E}_1 (en $V.m^{-1}$) :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \times \vec{E}_1(r) \text{ avec } \vec{E}_1(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

On peut alors interpréter la force de Coulomb, qui est une force à distance entre deux charges comme la force due à l'action du champ électrostatique, à distance, sans contact - de même que le poids fait tomber les objets - créé par une charge sur l'autre.



Champs électrostatiques d'une charge ponctuelle positive (à gauche) et négative (à droite).

La représentation précédente montre que le champ créé par une charge ponctuelle est à *symétrie sphérique*. Il est radial et décroît avec la distance à la charge.

I.3 Analogies avec la force de gravitation et le champ gravitationnel

Nous avons déjà constaté dans le cours de mécanique l'analogie qui existe entre la force de Coulomb et la force de gravitation :

$$\vec{F}_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \text{ et } \vec{F}_G = -G m_1 m_2 \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

Les deux forces sont centrales et proportionnelles à $1/r^2$ (forces newtoniennes), les masses étant les analogues des charges. La principale différence réside dans le fait que la force de gravitation est toujours attractive, alors que la force de Coulomb peut être attractive ou répulsive suivant le signe des charges.

Tout comme on a défini le champ électrostatique, on peut définir le champ gravitationnel \vec{G}_1 créé par une masse m_1 :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \times \left(-G \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_r \right) = m_2 \vec{G}_1(r) \text{ avec } \vec{G}_1 = -G \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_r$$

Comparaison : comparons les rapport de ces deux forces dans le cas de deux électrons ($m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg et $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C) et de deux masses ponctuelles macroscopiques chargées ($m = 1$ kg et $q = 1$ C). On rappelle que $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I.

$$\frac{\|\vec{F}_C\|}{\|\vec{F}_G\|} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2} \text{ et on obtient } \frac{\|\vec{F}_C\|}{\|\vec{F}_G\|}(\text{électrons}) \sim 4 \cdot 10^{42} \text{ et } \frac{\|\vec{F}_C\|}{\|\vec{F}_G\|}(\text{macro}) \sim 1 \cdot 10^{20}$$

Propriété

La force électrostatique s'exerçant entre particules chargées est beaucoup plus forte que la force de gravitation sauf pour les corps très massifs (astres).

- une distribution de charge volumique \mathcal{D} :

- une distribution de charge surfacique \mathcal{D}

- une distribution de charge linéique \mathcal{D}

II Structure et propriétés du champ électrostatique

Nous avons donné l'expression du champ électrostatique créé par différentes distributions de charges. Pour déterminer le champ électrostatique, il faut donc faire un calcul d'intégrale (triple, double, ou simple), souvent laborieux. Pour simplifier au maximum ce calcul, l'utilisation des propriétés de symétrie du champ est fondamentale.

En effet, un champ électrostatique possède les propriétés d'invariance et de symétrie de la distribution de charges qui le crée, comme nous allons l'illustrer.

II.1 Lignes de champ

Afin de représenter graphiquement le champ électrostatique, plutôt que de représenter des flèches dont la direction et la norme correspondent à celles du champ en tout point, on représente ce qu'on appelle les lignes de champ.

Une **ligne de champ électrostatique** est une courbe **tangente** en chacun de ses points au champ électrostatique (équivalent de la trajectoire par rapport à la vitesse). Elle est **orientée dans la direction du champ**.

Pour une charge ponctuelle, les lignes de champ sont radiales.

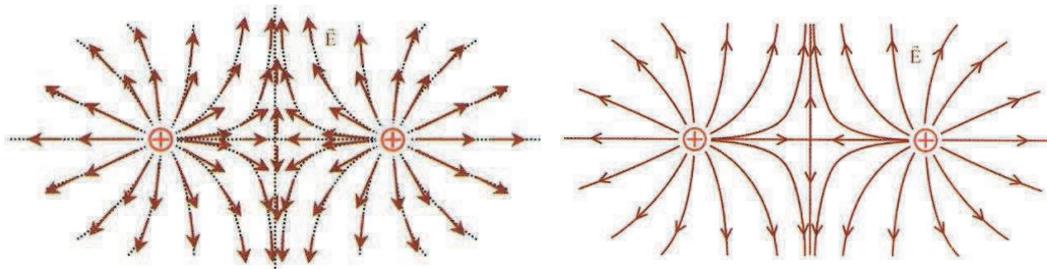
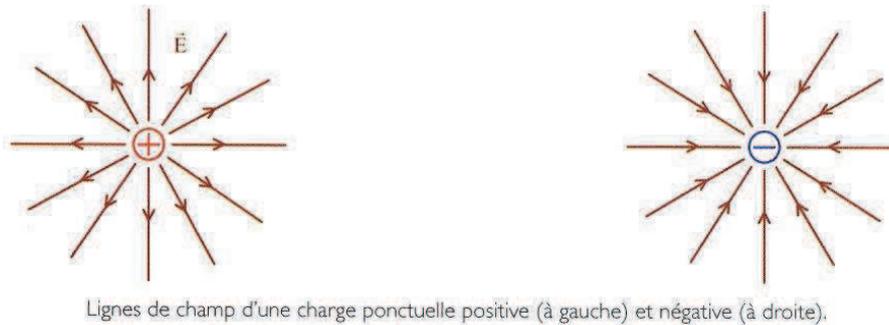
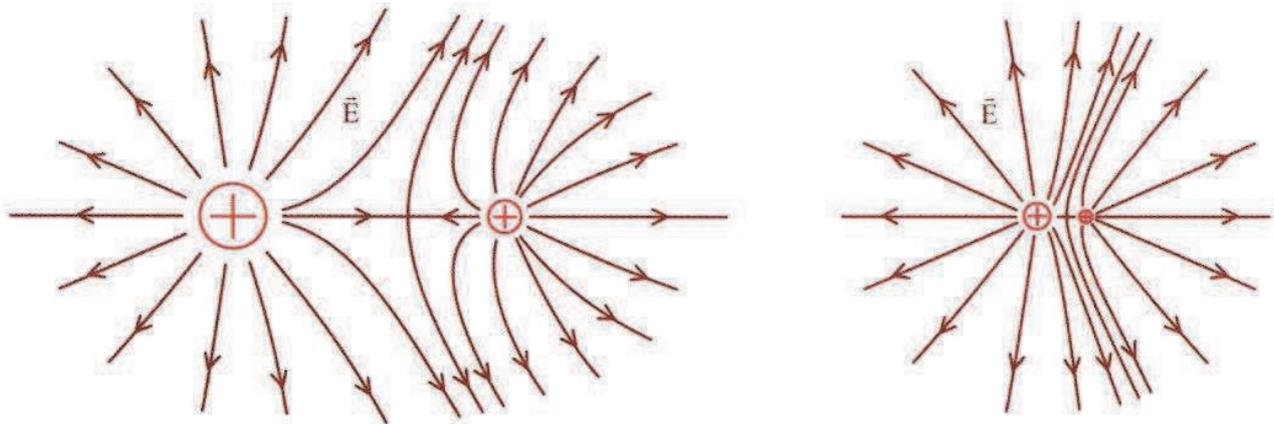


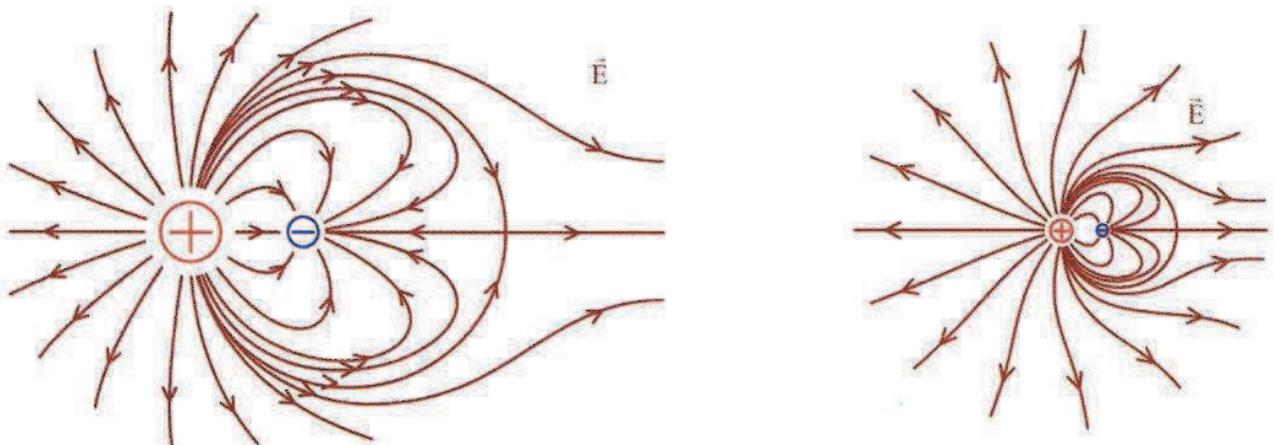
FIGURE 2 – a) Représentation des vecteurs champ électrostatique en chaque point. b) Lignes de champ électrostatiques.

Propriétés des lignes de champ :

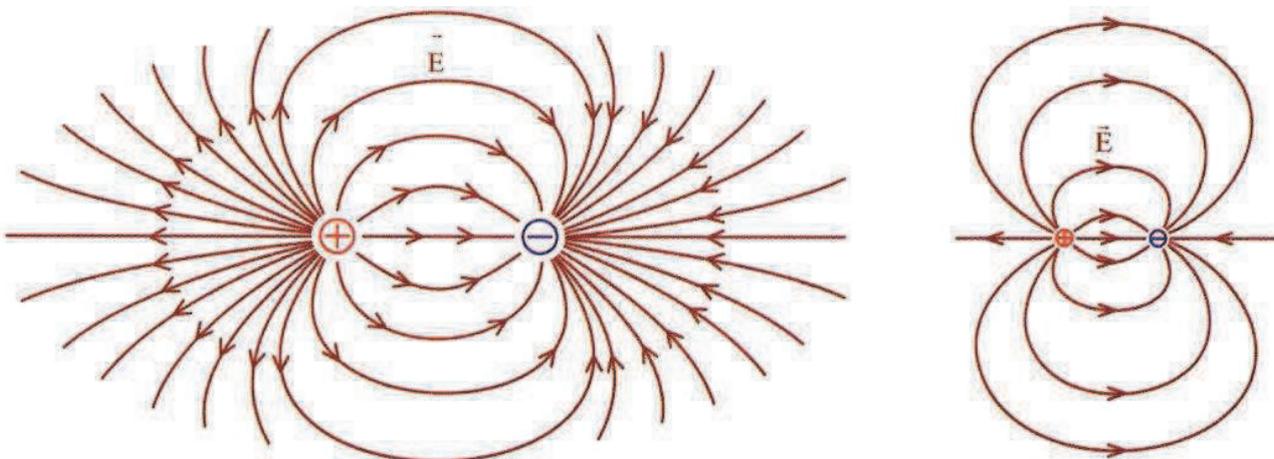
- Les lignes de champ électrostatiques **divergent à partir des charges positives et convergent vers les charges négatives**.
- Les lignes de champ ne se referment pas sur elles-mêmes.
- Le champ électrostatique est **nul au point d'intersection de deux lignes de champ**. En effet, le champ électrostatique doit être tangent à ces deux lignes, et au niveau du croisement il ne peut donc être que nul.
- Vues de « loin » (à une distance grande par rapport à la distance entre les charges), les lignes de champ d'une distribution s'apparentent à celles d'une charge ponctuelle de valeur égale à la charge totale de la distribution.



Lignes de champ créées par des charges différentes mais de signes identiques ("vues de loin à droite")



Lignes de champ créées par des charges différentes de signes opposés ("vues de loin à droite")

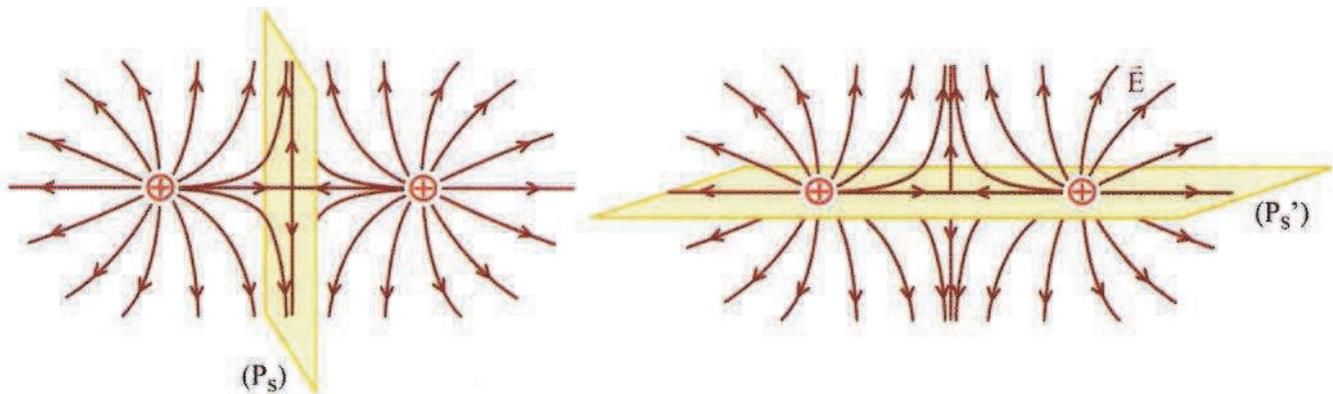


Lignes de champ créées par des charges identiques de signes opposés ("vues de loin à droite")

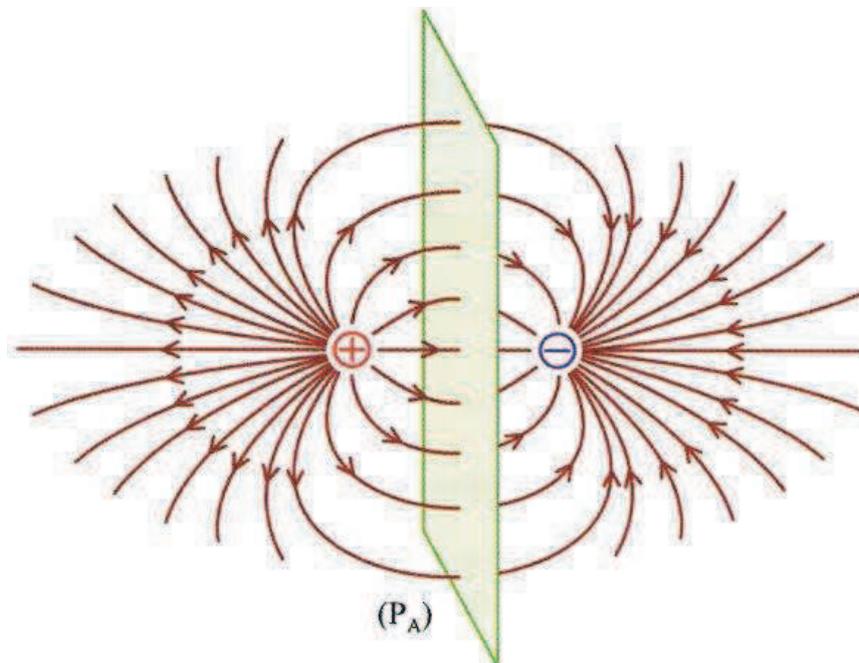
II.2 Propriétés de symétrie du champ électrostatique

a) Principe de Curie

Les cartographies précédentes font apparaître des symétries au niveau des charges et au niveau du champ.



Plans de symétrie d'un système de deux charges identiques.



Plan d'antisymétrie d'un système de deux charges opposées.

On remarque notamment que les plans de symétrie de la distribution de charge sont également des plans de symétrie du champ. De même pour les plans d'antisymétrie.

Un champ électrostatique possède les propriétés d'invariance et de symétrie de la distribution de charges qui le crée.

Ceci a amené Pierre Curie à postuler un principe plus général en 1894 :

Principe de Curie

Les conséquences d'un phénomène physique ont au moins les mêmes propriétés de symétries que leurs causes.

b) Symétrie plane

Soit une distribution de charge ayant un plan de symétrie Π .

α) Le champ électrostatique créé en un point d'un plan de symétrie appartient à ce plan.

β) A l'extérieur d'un plan de symétrie, le champ électrique est symétrique par rapport à ce plan : si $M' = sym_{\Pi}(M)$ alors $\vec{E}(M') = sym_{\Pi}(\vec{E}(M))$

c) Anti-symétrie plane

Soit une distribution de charge ayant un plan d'anti-symétrie Π^* .

α) Le champ électrostatique créé en un point d'un plan d'anti-symétrie est perpendiculaire à ce plan.

β) A l'extérieur d'un plan d'anti-symétrie, le champ électrique est tel que :
si $M' = sym_{\Pi^*}(M)$ alors $\vec{E}(M') = -sym_{\Pi^*}(\vec{E}(M))$

II.3 Propriétés d'invariance du champ électrostatique

a) Invariance par translation

Soit une distribution de charge ayant une *invariance par translation* suivant la direction Oz . D'après le principe de Curie, on doit alors aussi avoir une *invariance par translation pour le champ électrostatique*.

La norme du champ électrostatique ne dépend alors plus de la variable z :

- en coordonnées cartésiennes : $E(x, y, z) = E(x, y, z') = E(x, y)$, soit :

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y)\vec{u}_x + E_y(x, y)\vec{u}_y + E_z(x, y)\vec{u}_z$$

- en coordonnées cylindriques : $E(r, \theta, z) = E(r, \theta, z') = E(r, \theta)$, soit :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta + E_z(r, \theta)\vec{u}_z$$

b) Invariance par rotation

De la même façon, pour une invariance par rotation de la distribution de charge autour d'un axe Oz , la norme du champ électrostatique est indépendante de la coordonnée θ : $E(r, \theta, z) = E(r, \theta', z) = E(r, z)$, soit :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{u}_r + E_\theta(r, z)\vec{u}_\theta + E_z(r, z)\vec{u}_z$$

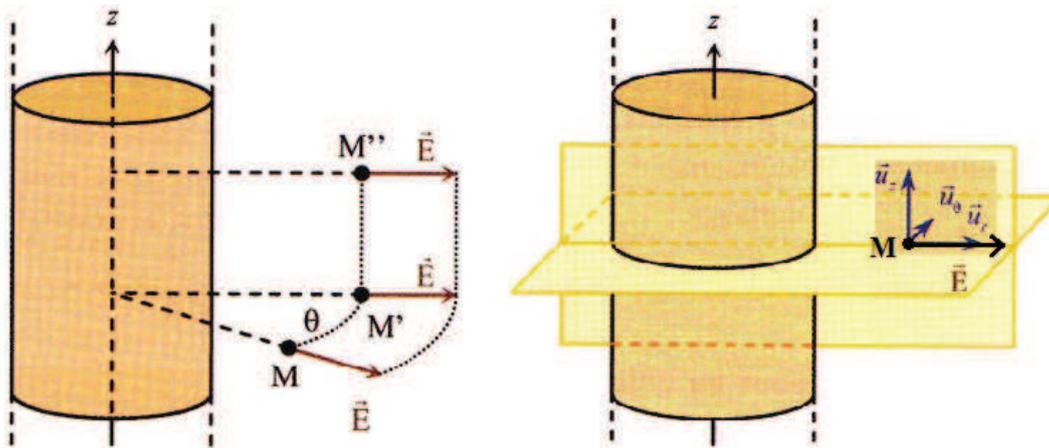
II.4 Cas particulier des symétries multiples

a) Symétrie cylindrique

Dans le cas où la distribution de charges est à **symétrie cylindrique** d'axe Oz :

- la norme du champ ne dépend que de la distance à l'axe r
- tout plan contenant M et Oz est plan de symétrie
- tout plan contenant M et perpendiculaire à Oz est plan de symétrie

Le champ électrostatique créé par une distribution de charges à symétrie cylindrique est radial : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$



Preuve :

b) Symétrie sphérique

Dans le cas où la distribution de charges est à **symétrie sphérique** de centre O :

- la norme du champ ne dépend que de la distance au centre r
- tout plan contenant M et O est plan de symétrie

Le champ électrostatique créé par une distribution de charges à symétrie sphérique est radial : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$

Remarque

|| Ce ne sont ni le même r ni le même \vec{u}_r que ceux des coordonnées cylindriques. On est ici en coordonnées sphériques. Ne pas les confondre !

Preuve :

III Potentiel électrostatique

III.1 Définition

Définition

On définit le potentiel électrostatique V à partir du champ électrostatique \vec{E} par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

III.2 Signification physique de l'opérateur gradient

Le gradient permet de caractériser les variations spatiales en 3D d'un champ scalaire $f(M, t)$:

$$df = f(M + \overrightarrow{d\ell}, t) - f(M, t) = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

où df correspond à la **différentielle** de la fonction f . Cet opérateur ne fait pas intervenir le système de coordonnées et est donc appelé *intrinsèque*.

• En coordonnées cartésiennes : $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$, donc $\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$

• En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$

• En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$

Propriété

- Les lignes de champ de $\overrightarrow{\text{grad}}f$ sont orientées dans le sens des valeurs croissantes de f .

$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{concentration})$
→

- Un champ scalaire est uniforme si et seulement si son gradient est nul en tout point de l'espace.
- $\overrightarrow{\text{grad}}f \perp \overrightarrow{d\ell}$ équivaut à $df = 0$, donc le gradient est orthogonal, à t fixé, aux surfaces $f(M) = \text{cte}$.

Propriété

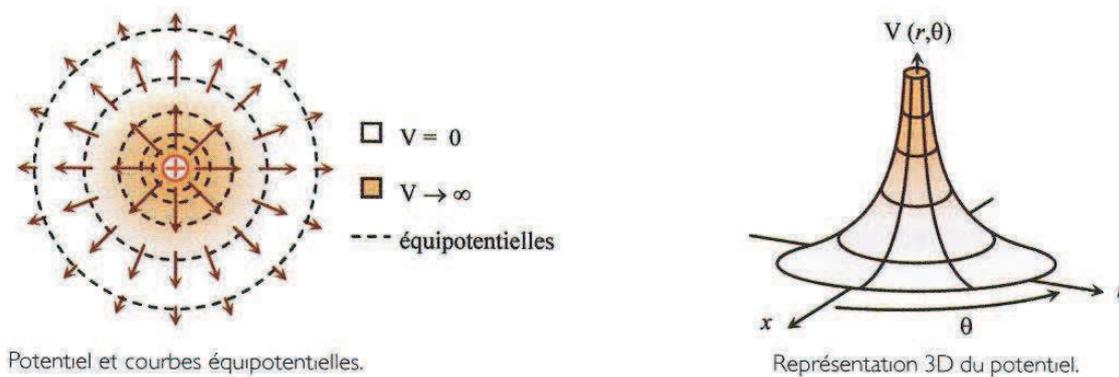
Revenons sur la définition du potentiel V : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

- Le "-" implique que le champ électrique est orienté dans le sens des potentiels décroissants (cf analogie hydraulique dans le champ de pesanteur).
- Le champ étant nécessairement une grandeur physique finie, le potentiel est toujours continu.

III.3 Potentiel dans un champ uniforme

III.4 Potentiel d'une charge ponctuelle - courbes équipotentielles

Définition : Les lignes **équipotentielles** correspondant par définition au lignes telles que $V = cste$ sont donc telles que $PM = cste$. Ce sont donc des cercles concentriques. On a représenté sur la même figure les lignes de champ et les équipotentielles dans le cas d'une charge positive.



On peut remarquer sur la figure précédente la propriété générale suivante :

Propriété

Les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ

Preuve :

On peut le vérifier sur une carte de champ avec plusieurs charges (voir figure a) page suivante).

III.5 Signification concrète du potentiel - lien avec l'énergie potentielle

Le travail reçu par une charge q en présence d'un champ extérieur s'écrit :

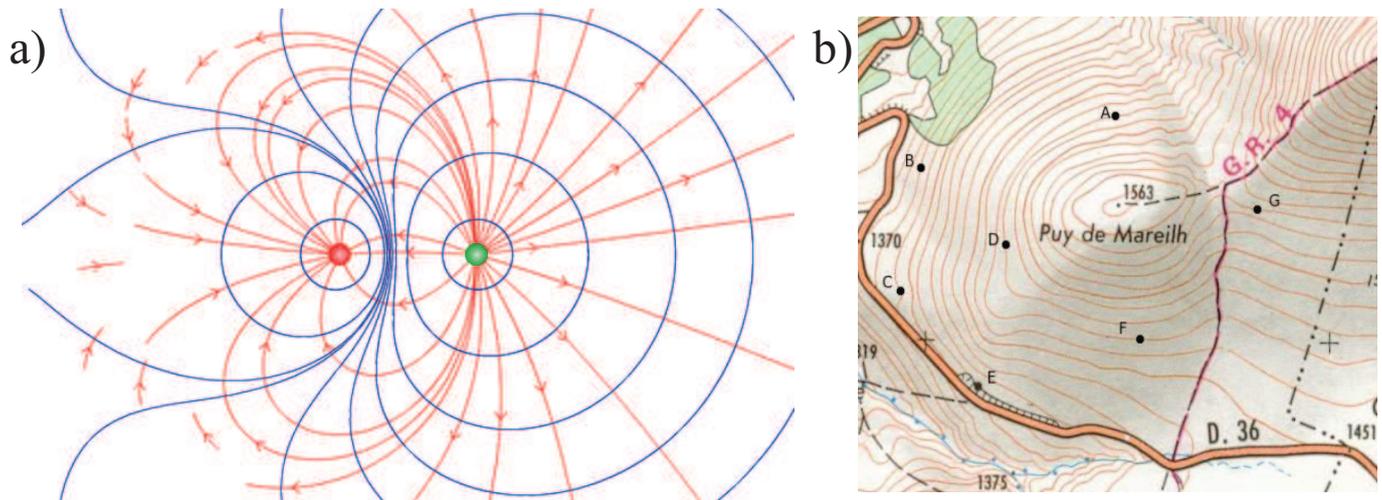


FIGURE 3 – a) Carte de champ et d'équipotentielles pour deux charges de signes opposés, tracées avec le logiciel figurant à l'adresse suivante : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Champs/lignes_champE.html. b) Carte IGN faisant figurer les variations d'altitude par des lignes de niveau.

La force électrostatique de Coulomb dérive ici d'une énergie potentielle, c'est à dire qu'on peut trouver une fonction E_p telle que $\vec{F} = -\text{grad}E_p$, et cette force est donc **conservative**. On définit donc l'énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur :

Comme en témoigne le tableau récapitulatif ci-dessous, la signification physique du potentiel est donc, à un coefficient multiplicatif près (q ici), une énergie potentielle, au même titre que l'altitude en mécanique donne l'énergie potentielle de pesanteur à une constante près (mg dans le cas où l'axe z pointe vers le haut).

	Electrostatique	Pesanteur (axe z vers le haut)
Force		
Energie potentielle		
Potentiel/Altitude		

On notera que, comme pour les énergies potentielles de pesanteur, le potentiel électrostatique est défini à une constante près. Il n'y a donc **pas unicité** du potentiel.

On notera la grande similarité des cartes de lignes équipotentielles avec les cartes IGN faisant figurer les lignes de niveau (cf figure b) ci-dessus), pour lesquelles les charges positives jouent le rôle de sommets et les charges négatives de déclivités.

Par analogie avec le fait que plus les lignes de niveaux sont resserrées, plus la pente est raide, on peut en déduire :

Propriété

Plus les lignes de champs sont resserrées, plus le module E du champ électrique est intense.

III.6 Unités et ordres de grandeur

- *Unités* :
 - Potentiel V en *Volt* (V)
 - Champ électrostatique E en $V.m^{-1}$
- *Ordres de grandeur* :
 - Potentiel V au palais de la découverte en électrostatique : 400 000 V.
 - Champ électrique créé par un proton sur un électron dans un atome d'hydrogène :

C'est également l'ordre de grandeur d'un champ qui permet d'ioniser un atome d'hydrogène. Néanmoins, dans l'air, qui contient toujours des ions à l'état de traces, des mécanismes d'ionisation en cascade permettent d'obtenir une ionisation importante pour des champs beaucoup plus faibles. Cette valeur est appelée **champ disruptif de l'air** et vaut : $E_{disruptif} \simeq 10^6 V.m^{-1}$.

III.7 Circulation du champ électrostatique

Définition

On appelle **circulation** d'un vecteur \vec{A} sur un contour \mathcal{C} l'intégrale : $\int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \vec{d\ell}$

La circulation du champ \vec{E} entre deux points A et B d'un contour \mathcal{C} s'écrit :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = - \int_A^B \overrightarrow{grad}V \cdot \vec{d\ell} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B)$$

Ainsi la circulation du champ électrique ne dépend pas du chemin suivi.

La relation entre la force et le champ permet de relier la circulation au travail de la force reçu par une charge q :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = q \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = q(V(A) - V(B))$$

On retrouve donc que le travail ne dépend pas du chemin suivi, et donc que la force est bien conservative. On dit par ailleurs que le champ électrique est à **circulation conservative**.

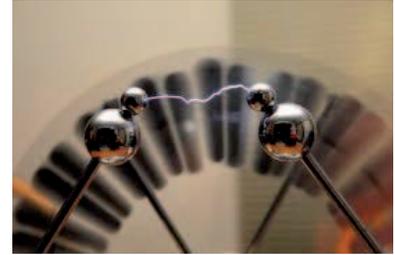
Pour un contour fermé, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = 0$.

Montrons qu'on peut en déduire que les lignes de champ \vec{E} ne peuvent se boucler sur elle-mêmes :

Une machine de Wimshurst permet d'obtenir une très haute tension par accumulation de charges. Le principe repose sur la collection de charges par frottement entre deux disques. Lorsque la machine est chargée au maximum, on peut obtenir des étincelles sur une longueur d'environ 1cm . La différence de potentiel entre les deux électrodes atteint donc :



A titre de comparaison, déterminons la taille maximale des étincelles qui peuvent être produites au palais de la découverte avec un générateur de $400\,000\text{ V}$:



IV Théorème de Gauss

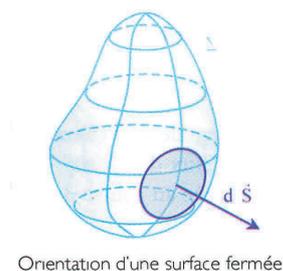
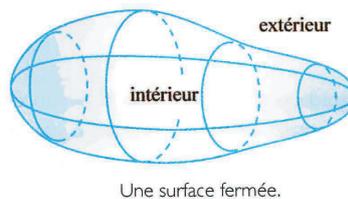
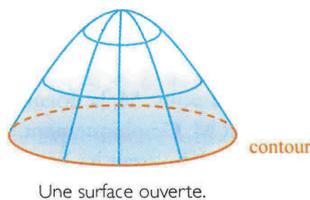
Nous avons vu que le calcul du champ électrostatique créé par une distribution de charges repose sur un calcul d'intégrale souvent laborieux. Nous allons introduire ici un théorème qui permet d'obtenir ce champ de façon simple lorsque les symétries de la distribution de charges sont suffisantes.

IV.1 Flux du champ électrostatique

a) Vecteur surface

Soit une surface élémentaire dS . Cette surface étant petite, on peut la considérer comme quasi-plane. On appelle \vec{n} le vecteur unitaire normal à cette surface. En général son orientation est arbitraire, mais dans le cas d'une surface fermée, ce vecteur est toujours orienté *de l'intérieur vers l'extérieur*.

On définit alors le **vecteur surface** $d\vec{S}$ par : $d\vec{S} = dS \vec{n}$ avec \vec{n} le vecteur unitaire normal (sortant) à la surface.



b) Flux du champ électrostatique

• Flux à travers une surface finie

On définit le flux total du champ électrostatique à travers une surface Σ comme la somme de tous les flux élémentaires à travers les surfaces élémentaires composant la surface :

IV.2 Énoncé du théorème de Gauss

Théorème de Gauss

Le flux sortant du champ électrostatique \vec{E} créé par une distribution de charges \mathcal{D} à travers une surface fermée Σ est égal à la charge contenue à l'intérieur de la surface Σ divisée par la permittivité du vide ϵ_0 :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma \text{ fermée}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Remarques :

- Le vecteur $d\vec{S}_{ext}$ est orienté **de l'intérieur vers l'extérieur** de la surface.
- On ne compte que les charges à l'intérieur de la surface Σ mais le champ \vec{E} est celui créé **par l'ensemble de la distribution**.

Le théorème de Gauss est un outil puissant pour calculer le champ créé par une distribution de charge homogène lorsque celle-ci possède des symétries suffisantes. La méthode de calcul est toujours la même :

1. Etude des **symétries** et des **invariances** pour déterminer la direction du champ électrostatique et les variables dont dépend sa norme.
2. Choix d'une surface fermée Σ dite **surface de Gauss** pour appliquer le théorème. Ce choix dépend bien sûr des symétries trouvées.
Pour déterminer le champ en un point M de l'espace, on choisit une surface Σ telle que :
 - Σ passe par le point M
 - la norme de \vec{E} soit identique en tout point de Σ
 - le champ \vec{E} soit normal à Σ en tout point
3. Application du **théorème de Gauss** : calcul de l'expression du flux et de la charge Q_{int} puis détermination de \vec{E} .
4. Vérification de l'**homogénéité** (on utilisera systématiquement le cas d'une charge ponctuelle comme référence : $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$) et de la **cohérence de l'expression** : \vec{E} diverge des charges positives et converge vers les charges négatives, et \vec{E} est toujours continu, sauf éventuellement au niveau de charges surfaciques.

En pratique, le choix de surface de Gauss est très réduit et dépend du système de coordonnées adapté :

- un parallélépipède rectangle en coordonnées cartésiennes
- un cylindre centré sur l'axe Oz en coordonnées cylindriques
- une sphère centrée sur l'origine O en coordonnées sphériques

IV.3 Analogie du théorème de Gauss en gravitation

IV.4 Exemples d'application

a) Champ et potentiel créé par une boule uniformément chargée en volume

Symétries et invariances puis théorème de Gauss permettent de montrer qu'une sphère de centre O et de rayon R uniformément chargée avec une densité volumique de charge ρ crée :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{pour } r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r & \text{pour } r < R \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + C_1 & \text{pour } r > R \\ \frac{\rho(R^2 - r^2)}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + C_1 & \text{pour } r < R \end{cases}$$

A l'extérieur de la boule, sachant que la charge totale de la boule vaut $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, on peut réécrire le champ sous la forme :

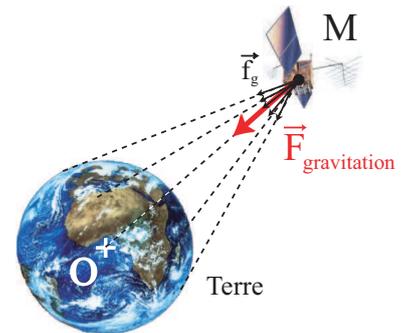
Propriété

Le champ électrostatique à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.

Analogie gravitationnelle :

Dans le cas de l'interaction gravitationnelle entre un satellite et la Terre, le satellite peut effectivement être considéré comme un objet ponctuel par rapport à la distance Terre-Satellite. En revanche, la Terre ne peut pas l'être car le diamètre de la Terre (13 000 km) est du même ordre de grandeur que la distance Terre-Satellite.

Cependant, l'utilisation du théorème de Gauss permet de montrer que l'ensemble des forces de gravitation exercées par chacun des points de la Terre sur le satellite est équivalent à une seule force de gravitation exercée par le point O situé au centre de la Terre, qui concentrerait toute la masse terrestre. Ceci est dû à la symétrie sphérique de la Terre. Le problème est donc en tout point similaire pour l'interaction électrostatique.



b) Champ et potentiel créés par un fil infini uniformément chargé en longueur

Symétries et invariances puis théorème de Gauss permettent de montrer qu'un fil infini sur l'axe Oz uniformément chargé avec une densité linéique de charge λ crée :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C_1$$

c) Champ et potentiel créés par un cylindre infini uniformément chargé en volume

Symétries et invariances puis théorème de Gauss permettent de montrer qu'un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R uniformément chargé avec une densité volumique de charge ρ crée :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r & \text{pour } r > R \\ \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r & \text{pour } r < R \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + C_1 & \text{pour } r > R \\ \frac{\rho(R^2 - r^2)}{4\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R + C_1 & \text{pour } r < R \end{cases}$$

On notera qu'on retrouve les expressions obtenues pour le fil infini lorsque le cylindre est observé de loin, c'est à dire pour $r \gg R$, avec $\lambda = \rho\pi R^2$.

d) Champ et potentiel créés par un plan infini uniformément chargé en surface

Symétries et invariances puis théorème de Gauss permettent de montrer qu'un plan infini xOy uniformément chargé avec une densité surfacique de charge σ crée :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} + C_1 & \text{pour } z > 0 \\ \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} + C_1 & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

e) Discontinuité du champ électrique au niveau d'un conducteur chargé en surface

On constate dans les exemples précédents qu'il existe une discontinuité du champ électrique \vec{E} au niveau d'un conducteur chargé en surface avec une densité de charge σ .

En effet, dans le cas du plan infini :

$$\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

On peut montrer à l'aide du théorème de Gauss (cf exercice du TD6) que la relation obtenue ici se généralise à la **relation de passage** pour tout conducteur chargé en surface avec une densité de charge σ séparant deux milieux notés 1 et 2 :

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}}$$

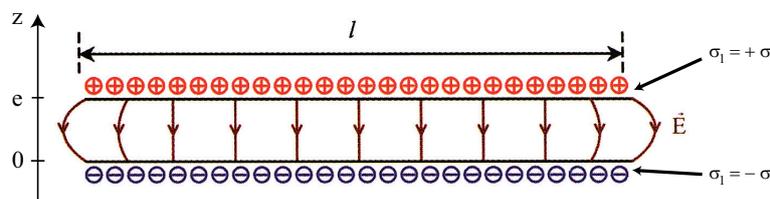
où les champs sont pris au niveau de l'interface, et où \vec{n}_{12} est un vecteur unitaire normal à l'interface et dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

f) Condensateur plan

• **Modèle du condensateur plan**

On appelle condensateur plan un ensemble de deux conducteurs plans infinis, d'épaisseur négligeable, parallèles entre eux.

On s'intéresse à un condensateur dont l'armature 1 porte une densité surfacique $\sigma_1 = +\sigma$ positive (charge totale Q) et l'armature 2 porte une densité $\sigma_2 = -\sigma$ négative (charge totale $-Q$).



Dans la pratique, les conducteurs ont une surface S et sont distants de e . Le modèle du condensateur plan est réalisé en bonne approximation si e est négligeable devant les dimensions des plaques. La charge surfacique peut être supposée uniforme.

• **Calcul du champ**

- Calcul du potentiel

- Calcul de la capacité