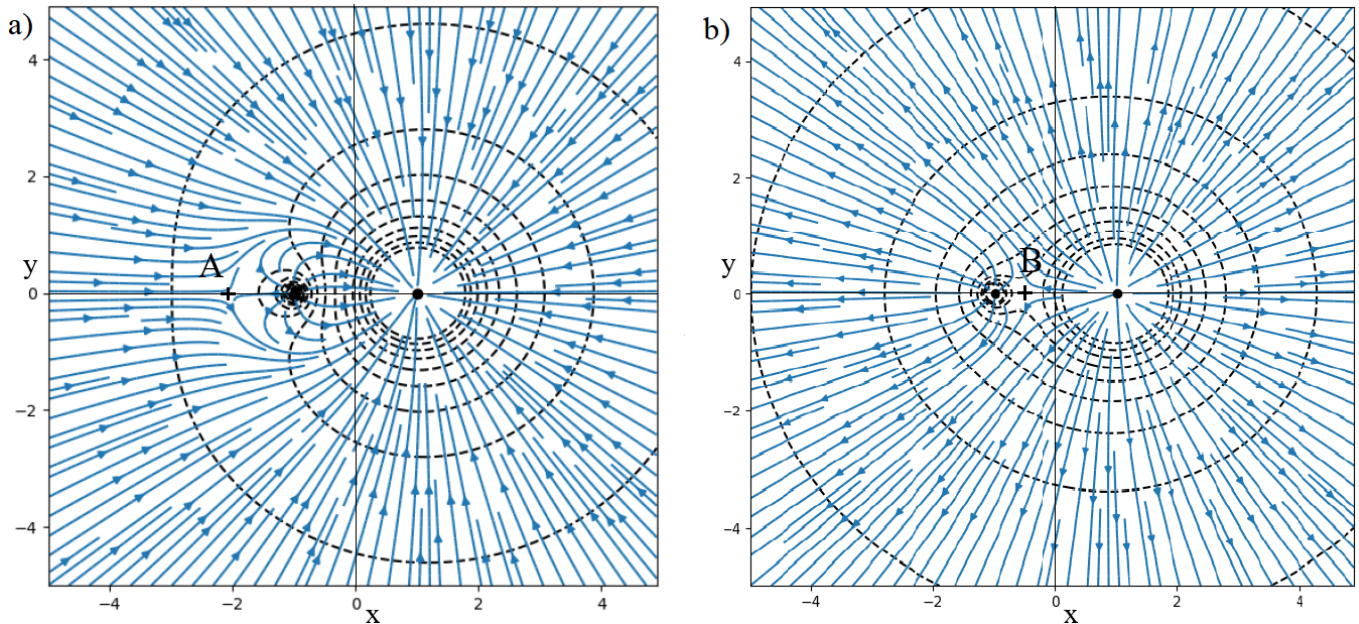



TD n°6 - Électrostatique

1 Cartes de lignes de champ électrostatique

- Rappeler la définition d'une ligne de champ.
- Déterminer, à l'aide des cartes de champ électrostatique ci-dessous le signe de chacune des deux charges ainsi que le rapport $\frac{q_1}{q_2}$. On donne les coordonnées des charges et des points particuliers des lignes de champs dans le repère (O, x, y) : $q_1(-1, 0)$, $q_2(1, 0)$, $A(-1, 0)$ et $B(-0.5, 0)$.



- En vous aidant des résultats établis à la question précédente, esquisser l'allure de la carte de champ créé par deux charges $q_1 = +q$ et $q_2 = -4q$.
-  Vérifier les résultats précédents en utilisant le fichier *TD-6-CartesChampE.py* disponible sur le site de la classe, permettant de tracer des lignes de champ \vec{E} et des équipotentielles (capacité numérique).

2 Calculs de champs \vec{E} créés par des distributions de charges

En utilisant les symétries des distributions de charge et en précisant précisément la surface de Gauss choisie, montrer que le champ électrique \vec{E} et le potentiel V créé par :

- un plan infini xOy uniformément chargé avec une densité surfacique de charge σ sont donnés par :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} + C_1 & \text{pour } z > 0 \\ \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} + C_1 & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

- un fil infini sur l'axe Oz uniformément chargé avec une densité linéique de charge λ sont donnés par :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C_1$$

3. un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R uniformément chargé avec une densité surfacique de charge σ sont donnés par :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r & \text{pour } r > R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \vec{u}_r & \text{pour } r < R \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln r + C_1 & \text{pour } r > R \\ -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln R + C_1 & \text{pour } r < R \end{cases}$$

4. un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R uniformément chargé avec une densité volumique de charge ρ sont donnés par :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r & \text{pour } r > R \\ \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r & \text{pour } r < R \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + C_1 & \text{pour } r > R \\ \frac{\rho(R^2 - r^2)}{4\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R + C_1 & \text{pour } r < R \end{cases}$$

5. une sphère de centre O et de rayon R uniformément chargée avec une densité surfacique de charge σ sont donnés par :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{pour } r > R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \vec{u}_r & \text{pour } r < R \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + C_1 & \text{pour } r > R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} + C_1 & \text{pour } r < R \end{cases}$$

6. une sphère de centre O et de rayon R uniformément chargée avec une densité volumique de charge ρ sont donnés par :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{pour } r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r & \text{pour } r < R \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + C_1 & \text{pour } r > R \\ \frac{\rho(R^2 - r^2)}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + C_1 & \text{pour } r < R \end{cases}$$

7. une sphère de centre O et de rayon R chargée avec une densité de charge $\rho = ar$ sont donnés par :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{aR^4}{4\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{pour } r > R \\ \frac{ar^2}{4\epsilon_0} \vec{u}_r & \text{pour } r < R \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} \frac{aR^4}{4\epsilon_0 r} + C_1 & \text{pour } r > R \\ \frac{a(R^3 - r^3)}{12\epsilon_0} + \frac{aR^3}{4\epsilon_0} + C_1 & \text{pour } r < R \end{cases}$$

8. deux plans infinis, parallèles, uniformément chargés en surface, celui situé en $z = 0$ avec une densité σ et celui situé en $z = d$ avec une densité $-\sigma$ sont donnés par :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{entre les deux plans} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{à l'extérieur} \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} C_1 & \text{pour } z < 0 \\ -\frac{\sigma z}{\epsilon_0} + C_1 & \text{entre les deux plans} \\ -\frac{\sigma d}{\epsilon_0} + C_1 & \text{pour } z > d \end{cases}$$

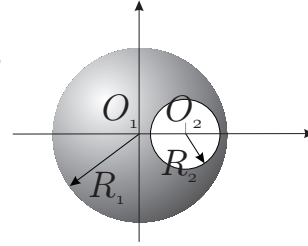
9. une densité volumique de charge uniforme ρ contenue entre deux plans parallèles d'équations $z = -a/2$ et $z = a/2$ sont donnés par :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \vec{u}_z, & \text{si } z > \frac{a}{2} \\ \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z, & \text{si } -\frac{a}{2} < z < 0 \\ -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} \vec{u}_z, & \text{si } z < -\frac{a}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} C_1 - \frac{\rho a z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}, & \text{si } z > \frac{a}{2} \\ C_1 - \frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}, & \text{si } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ C_1 + \frac{\rho a z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}, & \text{si } z < -\frac{a}{2} \end{cases}$$

3 Champ électrique dans une cavité

On considère une boule uniformément chargée ρ , de centre O_1 et de rayon R_1 , dans laquelle existe une cavité creuse de centre O_2 et de rayon R_2 telle que représentée sur la figure ci-dessous.

1. Montrer que le champ électrique dans la cavité est uniforme et donner son expression en fonction de ρ , ϵ_0 et du vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$.
Indication : penser au théorème de superposition !
2. Tracer les lignes du champ électrique dans la cavité.

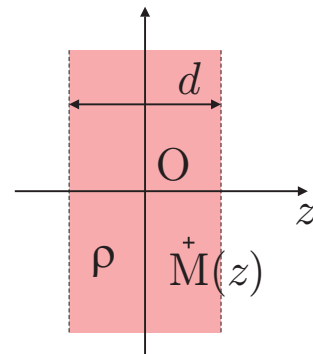


Réponse : 1. $\vec{E}_{tot}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho \overrightarrow{O_1O_2}}{3\epsilon_0}$.

4 Analogie entre l'électrostatique et la gravitation

Des charges sont uniformément réparties avec une densité de charge $\rho > 0$ dans une tranche d'épaisseur d (et s'étend à l'infini dans les autres directions).

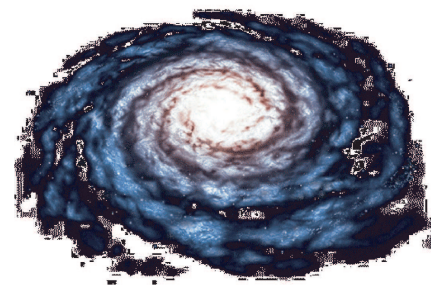
1. Montrer, en utilisant les symétries du système, que le champ électrique est nul au centre de la tranche.
2. Préciser la direction et le sens du champ électrique en un point M .
3. Tracer les lignes de champ électrique dans la tranche.
4. Déterminer le champ électrique en un point M à la distance z du centre de la tranche.



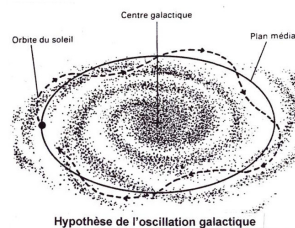
5. On place maintenant une particule de charge $q = -q_0$ négative au point M , dans la tranche chargée. Quel est son mouvement ?

On se propose maintenant d'utiliser les résultats précédents pour déterminer, à l'aide d'une analogie, la période d'oscillation du système Solaire dans la Galaxie. On rappelle que la force gravitationnelle exercée par une masse m_1 sur une masse m_2 s'écrit :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$



6. Faire l'analogie entre la force de gravitation et celle de l'électrostatique, en les comparant terme à terme.
7. Notre Galaxie peut être considérée comme un milieu uniforme de masse volumique approximative $\mu \approx 2 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. En déduire un ordre de grandeur de notre période d'oscillation de part et d'autre du plan de notre Galaxie (en années), sachant que $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.




Réponses : 4. $\vec{E}(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{e}_z, \forall z$, 7. $T = \sqrt{\frac{\pi}{\mu G}} \simeq 50$ millions d'années.

5 Champ créé par deux fils parallèles de charges opposées

On considère 2 fils rectilignes, infinis, parallèles à l'axe (Oz), et d'équations cartésiennes $x = +a$ et $x = -a$, de charges linéiques uniformes respectives $+\lambda$ et $-\lambda$, avec $\lambda > 0$. On note A_1 et A_2 leur intersection respective avec le plan (xOy).

Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) , et on note r_1 et r_2 les distances entre M et chacun des fils.

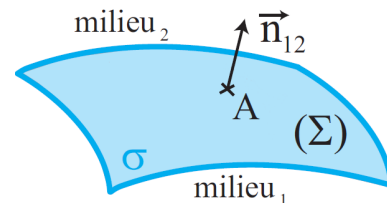
On choisit l'origine des potentiels au point O origine du repère.

- Calculer l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ créé en M par l'ensemble des 2 fils en fonction de λ , r_1 et r_2 .
-  En modifiant le programme python `TD-6-CartesChampE.py` disponible sur le site de la classe, montrer que les équipotentielles sont des cercles. Ceux-ci sont-ils concentriques ?

Réponse : $V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

6 Relations de passage au niveau de densité surfaciques de charge et de courant (🚗)

On considère une surface (Σ), présentant une densité surfacique de charge $\sigma(A)$ localement autour du point A . Celle-ci sépare deux milieux notés 1 et 2 ne présentant ni charges, ni courants.



- En régime stationnaire :

(a) montrer, à l'aide du théorème de Gauss, que : $\vec{E}_{2n}(A) - \vec{E}_{1n}(A) = \frac{\sigma(A)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ où $\vec{E}_{1n}(A)$ et $\vec{E}_{2n}(A)$ sont respectivement les composantes normales à la surface Σ des champs électriques dans les milieux 1 et 2 juste au niveau de la surface, en A .

(b) montrer, à l'aide de la loi de Faraday (\vec{E} est à circulation conservative en régime stationnaire), que : $\vec{E}_{2t}(A) - \vec{E}_{1t}(A) = \vec{0}$ où $\vec{E}_{1t}(A)$ et $\vec{E}_{2t}(A)$ sont respectivement les composantes tangentiels à la surface Σ des champs électriques dans les milieux 1 et 2 juste au niveau de la surface, en A .

- En déduire la relation de passage du champ électrique à la traversée d'une interface sous forme compacte.

7 Théorème de l'extremum (🚗)

Montrer qu'il n'existe pas d'extremum de potentiel électrostatique dans une région ne comportant pas de charges. En déduire le problème ainsi posé pour piéger une particule chargée, et proposer une solution pratique pour y remédier.

Indication : faire une démonstration par l'absurde en utilisant le théorème de Gauss.