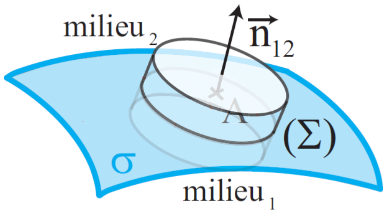
TD n°6 - Correction des exercices en autonomie

1 Relations de passage au niveau de densité surfaciques de charge et de courant

1. (a) Utilisons tout d'abord le théorème de Gauss.

Considérons une surface en forme de "boîte de camembert" avec deux faces parallèles à la surface (Σ) de surface dS suffisamment petite pour que toutes les grandeurs puissent être uniformes autour du point A. On applique le théorème de Gauss en régime stationnaire avec cette surface de Gauss :



$$\Phi_{tot} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{lat} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

avec $\begin{cases} \Phi_1 = -\vec{E}_{1n} \cdot dS\vec{n}_{12} = -E_{1n}dS \\ \Phi_2 = \vec{E}_{2n} \cdot dS\vec{n}_{12} = E_{2n}dS \\ \Phi_{lat} = \vec{E}_t \cdot dS_{lat}\vec{n}_{lat} = E_t dS_{lat} \end{cases}$

En faisant tendre l'épaisseur de la "boîte de camembert" vers 0, le terme Φ_{lat} tend vers 0. De plus, les valeurs des champs sont maintenant prises en A, point de la surface (Σ). On obtient donc :

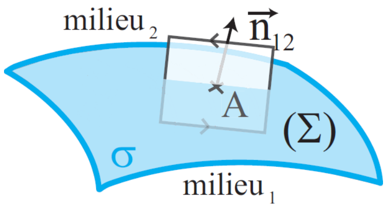
$$[E_{2n}(A) - E_{1n}(A)]\, dS = \frac{\sigma(A)dS}{\mathcal{E}_0}$$

En divisant par dS et sachant que toutes les grandeurs sont suivant le vecteur $\vec{n}_{12}$:

$$\boxed{\vec{E}_{2n}(A) - \vec{E}_{1n}(A) = \frac{\sigma(A)}{\mathcal{E}_0}\vec{n}_{12}}$$

(b) Utilisons maintenant la loi de Faraday.

Considérons un contour orienté "à cheval" sur la surface (Σ) de longueur dL selon la parallèle à la surface (Σ), et de longueur $d\ell$ selon la perpendiculaire à la surface, suffisamment petit pour que les grandeurs puissent être considérées comme uniformes autour du point A.



On applique la loi de Faraday au contour en faisant tendre $d\ell$ vers 0, et donc la circulation du champ sur la longueur $d\ell$ tend vers 0 en régime stationnaire[1] :

$$E_{2t}(A)dL - E_{1t}(A)dL = 0$$

En divisant par dL et sachant que les grandeurs sont vectorielles, on obtient :

$$\boxed{\vec{E}_{2t}(A) - \vec{E}_{1t}(A) = \vec{0}}$$

2. Les relations précédentes peuvent s'écrire de façon compacte de la façon suivante (on admettra que celle-ci se généralise au cas non stationnaire[2] :

$$\boxed{\vec{E}_2(A) - \vec{E}_1(A) = \frac{\sigma(A)}{\epsilon_0}\vec{n}_{12}}$$

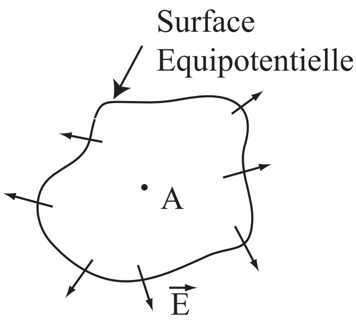
1. Même en régime variable, le terme supplémentaire correspondant à la variation du flux tend vers 0 car la surface tend vers 0 et le champ ne peut varier infiniment rapidement. Il y a donc toujours continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

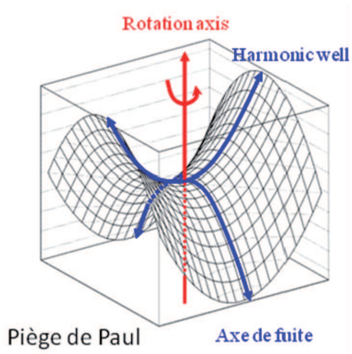
2. En effet, la loi de Faraday en régime variable donnée par $e = \oint \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$ conduit à calculer le flux du champ magnétique à travers le contour. Comme la dimension latérale du contour tend vers 0, le flux également, et on obtient finalement le même résultat qu'en régime stationnaire.

La composante tangentielle du champ électrique est toujours continue, et la composante normale est potentiellement discontinue. On admettra que

2 Théorème de l'extremum

Démonstration par l'absurde : on suppose qu'il existe un point A extremum (maximum par exemple) de potentiel électrostatique dans une zone de l'espace non chargée. Il existe donc nécessairement une équipotentielle du champ électrostatique entourant le point A, et ne passant pas par A. Le flux de $\vec{E}$ à travers cette surface équipotentielle est nécessairement positif car en tout point de celle-ci, le champ est normal à la surface, et orienté de l'intérieur vers l'extérieur. On en déduit donc qu'il existe nécessairement une charge positive à l'intérieur de cette surface équipotentielle. C'est absurde, ce qui démontre la proposition annoncée.





Remarque : Il est donc impossible de piéger une particule chargée dans un champ électrostatique. Néanmoins, il est possible de réaliser un piège en utilisant un champ variant dans le temps. En effet, un potentiel en selle de cheval se retournant dans un temps très court par rapport au temps nécessaire à la particule pour sortir permet de réaliser un piège. C'est le principe du piège de Paul (cf vidéo *TD-6-Théorème de l'extremum - Vidéo - Piège de Paul.avi* sur le site de la classe).