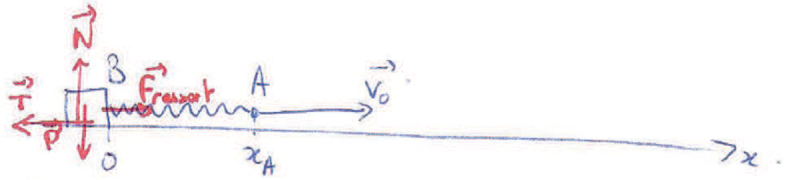
Correction - DM n°5 - Mécanique

1 Masse tirée par un ressort



1) Mise en mouvement lorsqu'il y a glissement, lorsque $\|\vec T\| = f\|\vec N\|$.

Avant glissement : → forcément orienté vers l'arrière

TRL : $\begin{cases} 0 = -T + F_{ressort} \\ 0 = N - P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = -k(x_A - x_B - \ell_0)\underbrace{\vec u_{ext}}_{-\vec U_x}\cdot\vec U_x = k(x_A(t) - 0 - \ell_0) \\ N = mg \end{cases}$ à ℓ_{eq}

or $x_A(t) = v_0 t + \ell_0$

$\Rightarrow T = fN \Rightarrow k v_0 t = f m g \Rightarrow \boxed{t_0 = \dfrac{fmg}{k v_0}}$

2) Quand il y a glissement, $\|\vec T\| = \mu\|\vec N\|$ et $\vec T$ orienté suivant $-\vec v_g \,//\, -\vec U_x$.

TRL : $t > t_0$ $\begin{cases} m\ddot x = -\mu m g + k(\underbrace{v_0 t + \ell_0}_{x_A(t)} - \underbrace{x}_{x_B(t)} - \ell_0) \\ N = mg \end{cases}$

$\Rightarrow \ddot x + \dfrac{k}{m}\underbrace{(x - v_0 t)}_{Y} = -\mu g$ or $\ddot Y = \ddot X \Rightarrow \ddot Y + \underbrace{\dfrac{k}{m}}_{\omega_0^2} Y = -\mu g$.

$\Rightarrow x - v_0 t = -\dfrac{\mu g}{\omega_0^2} + A\cos(\omega_0(t-t_0)) + B\sin(\omega_0(t-t_0))$.

$\Rightarrow x(t_0) = 0 = -\dfrac{\mu g}{\omega_0^2} + A + v_0 t_0 \Rightarrow A = \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} - v_0 t_0 = \dfrac{mg}{k}(\mu - f)$

à t_0, le mobile n'a pas encore glissé

$\dot x(t_0) = 0 = \omega_0 B + v_0 \Rightarrow B = -\dfrac{v_0}{\omega_0}$

$\Rightarrow x(t) = v_0 t - \dfrac{\mu g m}{k} + \dfrac{mg}{k}(\mu - f)\cos(\omega_0(t-t_0)) - \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0(t-t_0))$

3. Voir fichier Capytale : e5a4-711214.

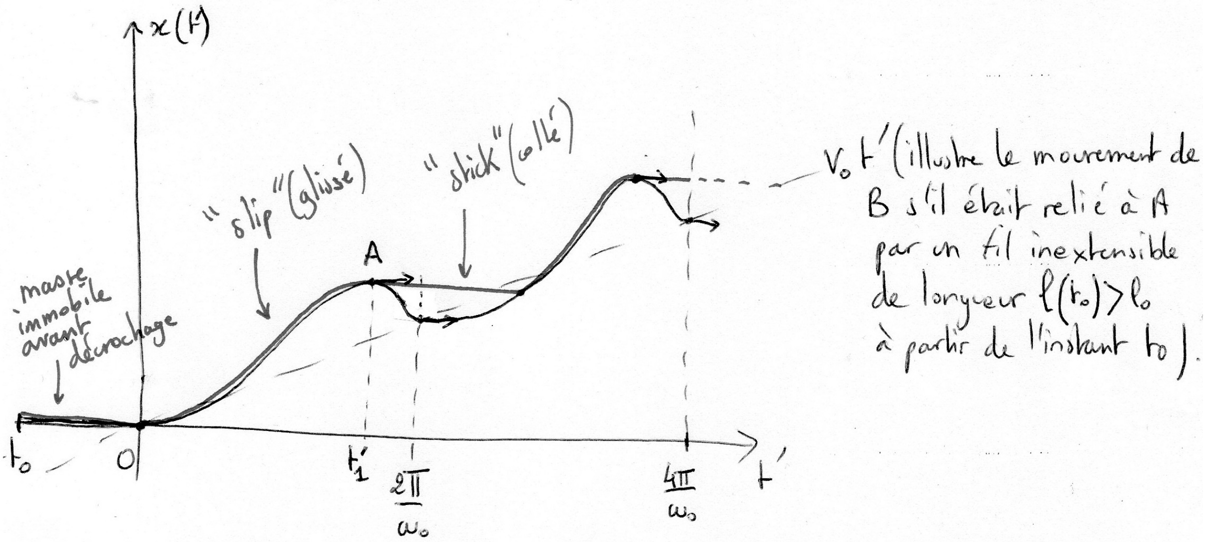
Complément : On cherche maintenant l'instant t_1 pour lequel le glissement s'arrête, c'est à dire lorsque la vitesse de glissement $\dot{x}(t)$ s'annule :

$$\dot{x}(t) = v_0 + \frac{(f-\mu)}{k}\omega_0 sin\left[\omega_0(t-t_0)\right] - v_0 cos\left[\omega_0(t-t_0)\right]$$

La vitesse s'annule de façon évidente pour $t = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, mais recherchons maintenant si elle ne peut s'annuler avant.

Traçons $x(t)$ pour voir quand la vitesse $\dot{x}(t)$ (c'est à dire la vitesse de glissement) s'annule ; il est commode dans ce cas de réexprimer $x(t)$ sous la forme $x(t')$ avec $t' = t - t_0 \geq 0$

$$x(t') = v_0 t' + (f-\mu)\frac{mg}{k}\left[1 - \cos(\omega_0 t')\right] - \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t')$$



Lorsque $t' = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $x\left(t' = \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = v_0 \frac{2\pi}{\omega_0} + 0 + 0 = v_0 \times t'$ et la courbe représentative de $(*)$ croise la droite $x(t') = v_0 t'$

Essayons d'exprimer t_1 en fonction des données ; sachant que $t'_1 = t_1 - t_0$ correspond à la première annulation de la vitesse de glissement, en A :

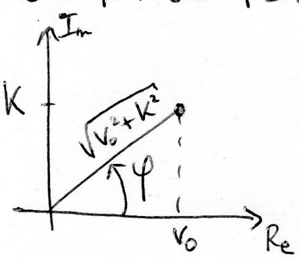
$$\dot{x}(t'_1) = v_0 + (f-\mu)\frac{mg\omega_0}{k}\sin(\omega_0 t'_1) - v_0\cos(\omega_0 t'_1) = 0$$

$$\Rightarrow v_0 = v_0\cos(\omega_0 t'_1) - (f-\mu)\frac{mg\omega_0}{k}\sin(\omega_0 t'_1)$$

noté K ensuite pour simplifier ($K > 0$ car $f > \mu$).

Soit $$\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+K^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+K^2}}\cos(\omega_0 t_1') - \frac{K}{\sqrt{v_0^2+K^2}}\sin(\omega_0 t_1')$$

on identifie avec $\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi+\psi)$ sachant que la transformation précédente a permis d'assurer que $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.



donc $$\underbrace{\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+K^2}}}_{\text{toujours} \leqslant 1} = \cos(\omega_0 t_1' + \varphi).$$

avec $\varphi = \arccos\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+K^2}}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_0 t_1' + \varphi = \arccos\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+K^2}} \ [2\pi] \Rightarrow t_1' = 0 \ \left[\frac{2\pi}{\omega_0}\right] \\ \omega_0 t_1' + \varphi = -\arccos\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+K^2}} \ [2\pi] \Rightarrow t_1' = -\frac{2}{\omega_0}\arccos\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+K^2}}\right) + \frac{2\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

Seule la solution non nulle nous intéresse, de sorte que :

$$\boxed{t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{2}{\omega_0}\arccos\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \left[\frac{(f-\mu)g}{\omega_0}\right]^2}}\right)}$$

Analysons cette expression :

→ si $\mu = f$ (pas de différence entre frottement statique et dynamique), alors $t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}$, il n'y a jamais de phase "stick", c'est à dire que la masse se remet à glisser dès qu'elle s'arrête.

En $t = t_1$, la masse s'arrête puisque la vitesse de glissement s'annule, et comme la longueur du ressort est en train de diminuer, le glissement s'arrête jusqu'à ce que la condition de glissement soit à nouveau atteinte pour un instant ultérieur lorsque le ressort s'étire à nouveau.

Pour la suite du mouvement, il se produit une alternance de phases de "collé" et de "glissé". Ce phénomène est appelé "stick-slip" et se retrouve dans de nombreux phénomènes physiques : crissement d'une craie sur un tableau, grincement d'une porte, frottement d'un archet sur une corde de violon...