

Correction - DM n°4 - Mécanique

1 Pendule simple dans un train en accélération

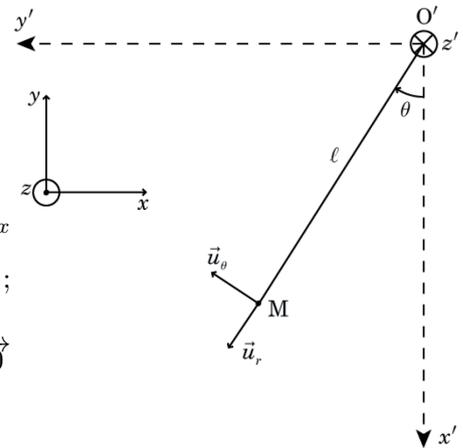
1. Effectuons une étude dynamique dans le référentiel lié au train, non galiléen (car en mouvement accéléré par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen).

Référentiel : \mathcal{R}' lié au train, en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen : $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}$.

Système : point matériel M .

Bilan des forces :

- poids : $\vec{P} = mg\vec{u}_{x'}$;
- tension du fil : $\vec{T} = -T_r\vec{u}_r$;
- force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{i,e} = -m\vec{a}_e$
 avec $\vec{a}_e = \left(\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{u}_x = 2a\vec{u}_x$
 d'où $\vec{f}_{i,e} = -2ma\vec{u}_x$;
- force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{i,c} = -m\vec{a}_c$
 avec $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$



d'où $\vec{f}_{i,c} = \vec{0}$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans \mathcal{R}' non galiléen s'écrit :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{i,e}$$

Or si M est à l'équilibre dans \mathcal{R}' , on a $\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$.

En projetant la relation précédente selon \vec{u}_θ (car $\vec{T} \cdot \vec{u}_\theta = 0$ et \vec{T} est inconnu), on en déduit :

$$0 = -mg \sin(\theta_e) + 2ma \cos(\theta_e) \Rightarrow \tan(\theta_e) = \frac{2a}{g}$$

Comme $-\frac{\pi}{2} < \theta_e < \frac{\pi}{2}$, on obtient $\theta_e = \arctan\left(\frac{2a}{g}\right) = 32^\circ$.

2. On a $\vec{r}' = l\vec{u}_r$ et $\theta \neq C^{te}$: $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a}(M/\mathcal{R}') = -l\dot{\theta}^2\vec{u}_r + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$.

En projetant le principe fondamental de la dynamique selon \vec{u}_θ , on obtient maintenant :

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) + 2ma \cos(\theta)$$

soit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{2a}{l} \cos(\theta) = 0$$

On étudie de petits mouvements autour de la position d'équilibre ; on pose donc $\theta = \theta_e + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$. On en déduit $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$.

De plus, on va pouvoir linéariser l'équation différentielle précédente, en utilisant :

$$\begin{cases} \sin(\theta) = \sin(\theta_e + \varepsilon) = \cos(\theta_e) \sin(\varepsilon) + \sin(\theta_e) \cos(\varepsilon) \approx \varepsilon \cos(\theta_e) + \sin(\theta_e) \\ \cos(\theta) = \cos(\theta_e + \varepsilon) = \cos(\theta_e) \cos(\varepsilon) - \sin(\theta_e) \sin(\varepsilon) \approx \cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e) \end{cases}$$

On obtient donc : $\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{l} (\sin(\theta_e) + \varepsilon \cos(\theta_e)) - \frac{2a}{l} (\cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e)) = 0$.

Pour faire apparaître $\tan \theta_e$, dont on connaît l'expression, on factorise une partie de l'équation par $\cos(\theta_e)$: $\ddot{\varepsilon} + \cos(\theta_e) \times \left(\frac{g}{l} (\tan(\theta_e) + \varepsilon) - \frac{2a}{l} (1 - \varepsilon \tan(\theta_e)) \right) = 0$.

Or $\tan(\theta_e) = \frac{2a}{g}$ donc $\ddot{\varepsilon} + \cos(\theta_e) \times \left(\frac{g}{l} \left(\frac{2a}{g} + \varepsilon \right) - \frac{2a}{l} \left(1 - \varepsilon \frac{2a}{g} \right) \right) = 0$, soit :

$$\ddot{\varepsilon} + \cos(\theta_e) \times \left(\frac{g^2 + 4a^2}{gl} \right) \varepsilon = 0$$

Pour déterminer $\cos(\theta_e)$, on utilise :

$$\frac{1}{\cos^2(\theta_e)} = 1 + \tan^2(\theta_e) = 1 + \left(\frac{2a}{g} \right)^2 = \frac{g^2 + 4a^2}{g^2} \Rightarrow \cos(\theta_e) = \frac{g}{\sqrt{g^2 + 4a^2}}$$

On en déduit finalement : $\ddot{\varepsilon} + \frac{\sqrt{g^2+4a^2}}{\ell}\varepsilon = 0$ d'où la pulsation propre $\omega_0 = \frac{(g^2+4a^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\ell}}$ puis la période du mouvement :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\sqrt{\ell}}{(g^2+4a^2)^{\frac{1}{4}}} = 1,85 \text{ s.}$$

2 Équilibre d'une bille dans un cerceau creux tournant autour d'un axe vertical

1. Dans le référentiel R' attaché au cerceau, non galiléen car en rotation par rapport au référentiel du laboratoire R supposé galiléen, les forces ou pseudo-forces s'exerçant sur la bille sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{centrifuge}} &= -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = m\omega^2 r \overrightarrow{u}_r, \quad r = a \sin(\alpha) \\ \overrightarrow{F_{Coriolis}} &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/R') = \vec{0} \text{ à l'équilibre} \\ \overrightarrow{R_{support}} \hat{=} \overrightarrow{T} &= T \cos(\alpha) \overrightarrow{u}_z - T \sin(\alpha) \overrightarrow{u}_r + R_\varphi \overrightarrow{u}_\varphi, \text{ avec } R_\varphi = 0 \text{ à l'équilibre} \\ \overrightarrow{P} &= m\vec{g} = -mg \overrightarrow{u}_z \end{cases}$$

Le PFD appliqué au système constitué de la bille, dans le référentiel R' , donne en projection dans le repère $(O, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$:

$$\begin{cases} m\omega^2 a \sin(\alpha) - T \sin(\alpha) &= 0 \\ -mg + T \cos(\alpha) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\omega^2 a - \frac{g}{\cos(\alpha)}\right) \sin(\alpha) &= 0 \\ T &= \frac{mg}{\cos(\alpha)} \end{cases}$$

D'où les positions d'équilibre de la bille :

$$\begin{cases} \alpha_{1,2} &= 0 \text{ ou } \pi \text{ (toujours)} \\ \alpha_{3,4} &= \pm \arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right) \quad \left(\text{si } \frac{g}{a\omega^2} \leq 1 \Leftrightarrow \omega \hat{=} \omega_0 \geq \sqrt{\frac{g}{a}}\right) \end{cases}$$

2. L'énergie potentielle de la bille s'écrit : $E_p = E_p(\overrightarrow{P}) + E_p(\overrightarrow{F_{centrifuge}})$, avec :

$$\begin{cases} E_p(\overrightarrow{P}) &= mgh = -mga \cos(\alpha) \quad (= 0 \text{ si } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ par convention}) \\ E_p(\overrightarrow{F_{centrifuge}}) &= -\int \overrightarrow{F_{centrifuge}} \cdot d\vec{l} = -\int_0^M m\omega^2 r dr = -\frac{m\omega^2 r_M^2}{2} = -\frac{m\omega^2 a^2 \sin^2(\alpha)}{2} \end{cases}$$

$$\text{d'où } E_p(\alpha) = -mga \cos(\alpha) - \frac{m\omega^2 a^2 \sin^2(\alpha)}{2}.$$

Les positions d'équilibre sont telles que $\frac{dE_p}{d\alpha} = 0$, soit :

$$\begin{aligned} mga \sin(\alpha) - m\omega^2 a^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) &= 0 \\ (g - \omega^2 a \cos(\alpha)) \sin(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

On retrouve les mêmes positions d'équilibre que précédemment. Etudions maintenant leur stabilité : $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = mga \cos(\alpha) - m\omega^2 a^2 (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$ d'où :

$$\text{--- en } \underline{\alpha = \alpha_1 = 0} \text{ ie (en haut) : } \frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = ma(g - \omega^2 a) \begin{cases} > 0 \text{ si } \underline{\omega < \omega_0} & \text{: équilibre stable} \\ < 0 \text{ si } \underline{\omega > \omega_0} & \text{: équilibre instable} \end{cases}$$

$$\text{--- en } \underline{\alpha = \alpha_2 = \pi} \text{ ie (en bas) : } \frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = ma(-g - \omega^2 a) < 0 \text{ toujours : équilibre instable.}$$

On peut encore écrire : $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = mga \cos(\alpha) - m\omega^2 a^2 (1 - 2\cos^2(\alpha))$ d'où, si $\omega \geq \omega_0$:

$$\text{--- en } \underline{\alpha = \alpha_{3,4}} : \left(\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2}\right)_{\alpha_{3,4}} = m\left(\omega^2 a^2 - \frac{g^2}{\omega}\right) \geq 0 : \underline{\text{équilibre stable.}}$$

L'allure de E_p dans les différents cas étudiés est tracée sur les figures a), b) et c).

3. Au voisinage de $\alpha = 0$, un développement limité à l'ordre 2 (voir cours sur l'approximation harmonique) donne : $E_{p,OH}(\alpha) = -mga + \frac{(\alpha-0)^2}{2} (mga - m\omega^2 a^2)$.

Or la vitesse de la bille est $v = a\dot{\alpha}$ donc son énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}ma^2\dot{\alpha}^2$.

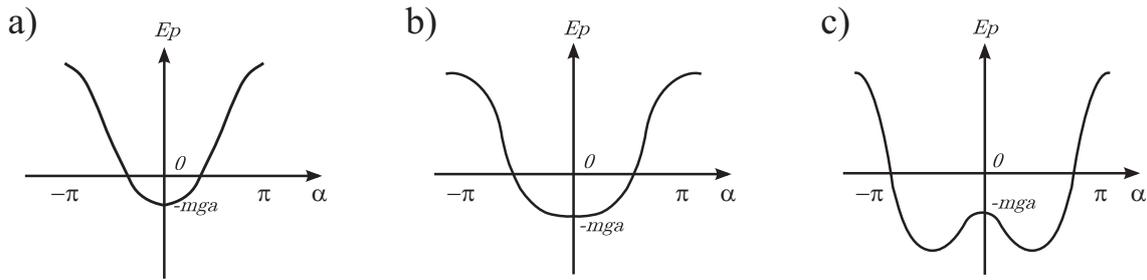


FIGURE 1 - a) cas où $\omega < \omega_0$. b) cas où $\omega = \omega_0$. c) cas où $\omega > \omega_0$.

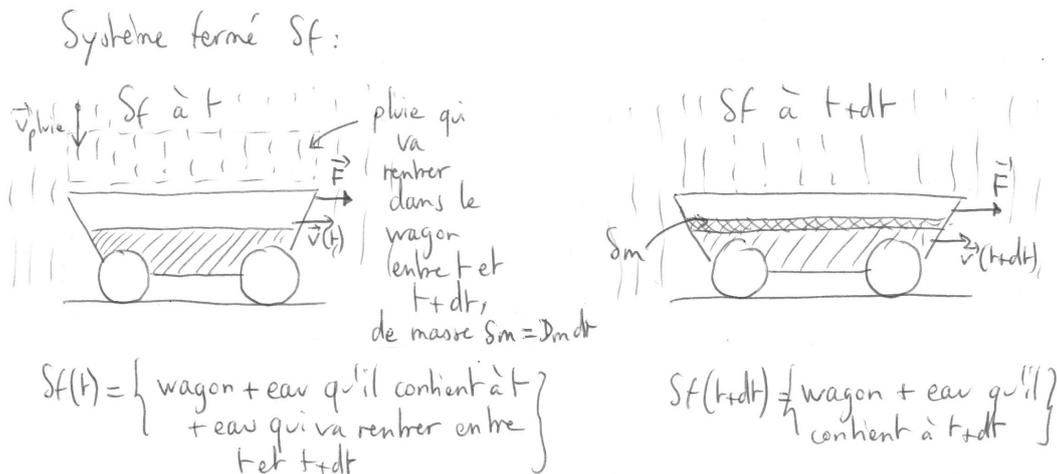
Donc son énergie mécanique s'écrit : $E_{\text{méca}} = \frac{1}{2}ma^2\dot{\alpha}^2 - ma^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}ma^2\alpha^2(\omega_0^2 - \omega^2) = C^{te}$ car seule des forces conservatives interviennent ici. En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$\ddot{\alpha} + (\omega_0^2 - \omega^2) \alpha = 0$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$, définie si $\omega < \omega_0$ ce qui est le cas au voisinage de $\alpha = 0$. On remarque que la période associée Γ augmente si ω augmente (donc si la période de rotation du cerceau diminue), et que $\Gamma \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} \infty$.

3 Wagon sous la pluie

Effectuons un bilan de quantité de mouvement dans le référentiel terrestre (du sol) galiléen pour le système fermé constitué du wagon, de l'eau qu'il contient à l'instant t (masse $m_{\text{eau}}(t) = D_{me}t$) et de l'eau qu'il va recevoir entre t et $t+dt$ de masse $\delta m_{\text{eau}} = D_{me}dt$. On se limite pour l'instant à la première phase du mouvement pendant laquelle le wagon n'est pas encore plein.



Sa quantité de mouvement est ¹ :

— A l'instant t :

$$\vec{p}(t) = [m_0 + m_{\text{eau}}(t)] v(t) \vec{u}_x + D_{me}dt \vec{v}_{\text{pluie/sol}}$$

— A l'instant $t + dt$:

$$\vec{p}(t + dt) = [m_0 + m_{\text{eau}}(t + dt)] v(t + dt) \vec{u}_x = [m_0 + m_{\text{eau}}(t) + D_{me}dt] v(t + dt) \vec{u}_x$$

1. On notera qu'il est inutile d'utiliser une loi de composition du mouvement comme dans l'exercice sur la fusée car la vitesse de la pluie correspond déjà à celle par rapport au référentiel d'étude.

Le wagon est soumis à son poids, à la réaction des rails et à la force de traction F (la résultante des forces de pression est nulle car le champ de pression est uniforme autour du système considéré). Seule la force F est horizontale, et le théorème de la résultante cinétique appliqué au système fermé précédent dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur la direction \vec{u}_x ² conduit à :

$$\frac{dp_x}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{p_x(t+dt) - p_x(t)}{dt} = [m_0 + m_{eau}(t)] \frac{dv}{dt} + D_{me}v = F$$

On obtient donc une équation différentielle à deux variables v et t :

$$\boxed{[m_0 + m_{eau}(t)] \frac{dv}{dt} + D_{me}v = F}$$

On peut la résoudre en séparant les variables :

$$\frac{dv}{F - D_{me}v} = \frac{dt}{m_0 + D_{me}t}$$

En intégrant, on obtient :

$$\frac{\ln(m_0 + D_{me}t)}{D_{me}} = -\frac{\ln(F - D_{me}v)}{D_{me}} + C$$

Sachant qu'à $t = 0$, $v = 0$, on en déduit :

$$\frac{\ln(m_0)}{D_{me}} = -\frac{\ln(F)}{D_{me}} + C$$

Donc $\frac{m_0 + D_{me}t}{m_0} = \frac{F}{F - D_{me}v}$ Finalement, tant que le wagon n'est pas plein, c'est à dire tant que $t < \frac{m_0}{D_{me}}$, on obtient :

$$\boxed{v \left(t < \frac{m_0}{D_{me}} \right) = \frac{F}{D_{me}} \left(1 - \frac{m_0}{m_0 + D_{me}t} \right) = \frac{Ft}{m_0 + D_{me}t}}$$

On voit que la vitesse augmente au cours du temps pour tendre vers la valeur $v_\infty = \frac{F}{D_{me}}$. Cependant, cette valeur n'est jamais atteinte car le wagon est plein avant de l'atteindre.

A $t_0 = \frac{m_0}{D_{me}}$, la vitesse atteinte vaut $v \left(t = \frac{m_0}{D_{me}} \right) = \frac{F}{2D_{me}}$. On se ramène ainsi au cas simple d'un solide

de masse $2m_0$, soumis à la résultante F , avec une vitesse initiale égale à $\frac{F}{2D_{me}}$, donc pour $t > t_0 = \frac{m_0}{D_{me}}$, on obtient :

$$\boxed{v \left(t > \frac{m_0}{D_{me}} \right) = \frac{F}{2D_{me}} + \frac{F(t - t_0)}{2m_0} = \frac{Ft}{2m_0}}$$

2. On notera que la contribution de la pluie n'intervient que suivant la direction verticale, et est compensée par la réaction verticale du support.

4 Satellite terrestre

I. Relations générales

1.

$$\vec{F}_g = -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{e}_r$$

Le vecteur position de M est : $\vec{OM} = r \vec{e}_r$, ce qui implique que le déplacement élémentaire est égal à : $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r$. Comme $d\vec{e}_r \perp \vec{e}_r$, le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = \vec{F}_g \cdot d\vec{\ell} = -GmM_T \frac{dr}{r^2} = -dE_p$$

et donc :

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{GmM_T}{r^2} \implies E_p(r) = -\frac{GmM_T}{r^2}$$

2. Le théorème du moment cinétique conduit à :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_g) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_g = \vec{0}$$

d'où \vec{L} reste constant. Ceci implique que le mouvement est plan puisque $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$, ce qui montre que les vecteurs \vec{OM} et \vec{v} restent à tout instant perpendiculaires à un vecteur constant.

3. Il faut exprimer \vec{L} dans la base polaire, sachant que $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$. Il vient :

$$\vec{L} = r \vec{e}_r \wedge m(\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta} \vec{e}_z$$

et donc $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante. D'un point de vue physique, C est la constante des aires puisque si A est l'aire balayée par le vecteur position \vec{OM} pendant Δt , alors :

$$A = \frac{C\Delta t}{2}$$

4. Dans le cas d'un mouvement circulaire, la vitesse et l'accélération s'écrivent :

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à M et en projetant sur \vec{e}_r , on obtient :

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_T}{R^2} \implies v_C^2 = R^2\dot{\theta}^2 = \frac{GM_T}{R}$$

d'où :

$$v_C = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} \quad \text{et} \quad E_c = \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{GmM_T}{2R}$$

5. L'orbite circulaire étant décrite avec une vitesse constante en norme, la période de révolution vérifie l'équation $v_C T = 2\pi R$ ce qui conduit à :

$$T = \frac{2\pi R}{v_C} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$$

et donc :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} R^3$$

6. Par définition :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{GmM_T}{2R} - \frac{GmM_T}{R} = -\frac{GmM_T}{2R}$$

II. Étude d'une trajectoire elliptique

7. a) Le point M n'étant soumis qu'à une force conservative, l'énergie mécanique est conservée. On aura donc :

$$E_m = E_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GmM_T}{r_A} = \frac{GmM_T}{9r_A} - \frac{GmM_T}{r_A}$$

et donc :

$$E_m = -\frac{8GmM_T}{9r_A} = -\frac{GmM_T}{2a} \implies a = \frac{9a}{16}$$

b) Aux points A et P , la vitesse est perpendiculaire au vecteur position (puisque $\dot{r} = 0$ en ces points). La conservation du moment cinétique s'écrit :

$$\vec{L} = \vec{OA} \wedge m\vec{v}_A = \vec{OP} \wedge m\vec{v}_P$$

ce qui, compte tenu de la perpendicularité des vecteurs, s'écrit encore :

$$mr_A v_A \vec{e}_z = mr_P v_P \vec{e}_z$$

et donc :

$$\frac{r_P}{r_A} = \frac{v_A}{v_P}$$

D'autre part, $r_A + r_P = 2a = \frac{9r_A}{8}$ d'après la question précédente. On en déduit que :

$$r_P = \frac{9r_A}{8} - r_A = \frac{r_A}{8} \implies \frac{r_P}{r_A} = \frac{1}{8} \text{ et } \frac{v_P}{v_A} = 8$$

8. a) Il s'agit d'une vitesse circulaire de rayon r_P . D'après la question 4. :

$$v_{stat} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_P}}$$

b) Comme les trois vecteurs vitesses sont de même direction et de même sens, nous pouvons écrire :

$$mv_P = \frac{m}{2}v_{cab} + \frac{m}{2}v_{stat} \implies v_{cab} = 2v_P - v_{stat}$$

Or $v_P = 8v_A = 8\sqrt{\frac{2GM_T}{9r_A}} = 8\sqrt{\frac{2GM_T}{9 \times 8r_P}}$ et donc :

$$v_P = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM_T}{r_P}} \text{ d'où } v_{cab} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{GM_T}{r_P}}$$

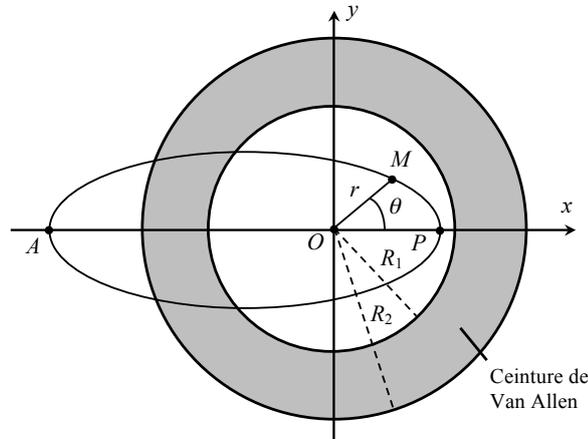
c) Juste après la séparation, la cabine est toujours à la distance r_P du centre de la Terre. Son énergie mécanique s'écrit (attention, la cabine a une masse $m/2$) :

$$E_m(cab) = \frac{1}{2} \frac{m}{2} v_{cab}^2 - \frac{GmM_T}{2r_P} = \frac{1}{2} \frac{m}{2} \frac{25GM_T}{9r_P} - \frac{GmM_T}{2r_P} = \frac{7}{36} \frac{GmM_T}{2r_P} > 0$$

L'énergie mécanique étant positive, la trajectoire est donc une hyperbole. Pour rentrer sur Terre, il faudra utiliser les moteurs de la capsule pour la guider vers l'atmosphère.

III. Passage dans la ceinture de Van Allen

9. Figure représentée ci-dessous :



10. r_A est obtenu pour $\cos \theta = -1$ et r_P pour $\cos \theta = +1$, ce qui conduit aux expressions :

$$r_A = \frac{p}{1 - e} \quad \text{et} \quad r_P = \frac{p}{1 + e}$$

Le quotient de ces deux relations donne :

$$\frac{r_P}{r_A} = \frac{1 - e}{1 + e} \iff r_P(1 + e) = r_A(1 - e)$$

et donc :

$$e = \frac{r_A - r_P}{r_P + r_A}$$

On en déduit ensuite que :

$$p = r_A(1 - e) = \frac{2r_A r_P}{r_P + r_A}$$

11. L'angle θ_1 est solution de $r(\theta) = R_1$, ce qui correspond à :

$$\frac{p}{1 + e \cos \theta_1} = R_1 \iff \cos \theta_1 = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{R_1} - 1 \right)$$

ou encore :

$$\cos \theta_1 = \frac{r_P + r_A}{r_A - r_P} \left(\frac{2r_A r_P}{(r_A + r_P)R_1} - 1 \right)$$

Application numérique : $\theta_1 = 57^\circ[360^\circ]$ ou $\theta_1 = -57^\circ[360^\circ] = 303^\circ[360^\circ]$

On obtient une relation analogue pour θ_2 en remplaçant R_1 par R_2 . Il vient : $\theta_2 = 143^\circ[360^\circ]$ et $\theta_2 = -143^\circ[360^\circ] = 217^\circ[360^\circ]$.

12.

$$A = \frac{C \Delta t}{2}$$

Le vecteur position balayant une aire S durant la période de révolution T , nous avons aussi :

$$S = \frac{C T}{2}$$

et donc :

$$\frac{A}{S} = \frac{\Delta t}{T}$$

Comme le vecteur \overrightarrow{OM} passe deux fois dans la ceinture de Van Allen à chaque période de révolution, nous avons :

$$\rho = \frac{\Delta t}{T} = \frac{2A}{S}$$

Application numérique : $e = 0,7234$ et $p = 11\,719$ km ce qui donne : $S = 1,311 \times 10^9$ km². On a donc :

$$\rho = 0,305 \approx 30\%$$

Le pourcentage d'activité du satellite est donc de 70%.