Commentaires - DM n^{o}5 - Mécanique

1 Masse tirée par un ressort

Exercice bien rédigé, qui n'a pas posé de problème pour la partie analytique. J'aurais aimé que davantage aillent au bout du programme python, qui était pourtant vraiment "pré-mâché".

J'ai juste trois petites remarques :

- à propos de $\overrightarrow{T}$. Pensez à commencer l'exercice par le schéma en précisant bien la définition de la force de réaction tangentielle. Par exemple :

$$\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u}_x \quad \text{avec} \quad T > 0$$

au moins au début (cas de non glissement puis début du glissement) car cette force s'oppose à la mise en mouvement de la masse. En revanche, comme on s'attend à observer des oscillations, T reste algébrique sur l'ensemble du mouvement et peut tout à fait devenir négatif plus tard.

- à propos de la résolution de l'équation différentielle qui comportait un second membre non constant :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 v_0 t - \mu g$$

Il y a deux méthodes dans ce cas :

— soit rechercher la solution particulière sous la forme d'une fonction affine $x_p(t) = At + B$;

— soit poser $y = x - v_0 t$ et réécrire l'équation différentielle sous la forme $\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\mu g$ en remarquant que $\ddot{y} = \ddot{x}$.

— attention, poser directement $x_p(t) = v_0 t - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$ ne fonctionne ici que parce que le second membre était un polynôme d'ordre 1. Cela ne fonctionnerait pas avec un polynôme d'ordre 2. Par exemple : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = at^2 + \omega_0^2 v_0 t - \mu g$ ne conduit pas à $x_p(t) = \frac{at^2}{\omega_0^2} + v_0 t - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$ car $\ddot{x}_p(t) \neq 0$...

- à propos des facteurs $(t - t_0)$ dans l'expression de $x(t)$:

$$x_{\text{B}}(t) = v_0 t - \frac{\mu m g}{k} + \frac{mg}{k}(\mu - f)\, cos\omega_0(t - t_0) - \frac{v_0}{\omega_0} sin\omega_0(t - t_0)$$

Il ne s'agit pas ici d'un changement d'origine des temps pour lequel il aurait fallu poser $t' = t - t_0$ pour obtenir (ce que je vous déconseille d'ailleurs au vu de ce qu'on fait ceux qui ont fait ce choix) : $x_{\text{B}}(t' = t - t_0) = v_0(t' + t_0) - \dfrac{\mu m g}{k} + \frac{mg}{k}(\mu - f)\, cos\omega_0 t' - \frac{v_0}{\omega_0} sin\omega_0 t'$. L'intérêt se comprend sachant que la solution de l'équation différentielle écrite plus haut peut tout à fait s'écrire :

$$x_{\text{B}}(t) = v_0 t - \frac{\mu m g}{k} + A' cos\omega_0(t) + B' sin\omega_0(t)$$

ou

$$x_{\text{B}}(t) = v_0 t - \frac{\mu m g}{k} + A cos\omega_0(t - t_0) + B sin\omega_0(t - t_0)$$

L'avantage de la seconde expression est qu'il est presque immédiat d'exploiter les conditions initiales connues à $t = t_0$, $x_B(t_0) = 0$ et $\dot{x}_B(t = t_0) = 0$.