Correction - DM n°6 - Electrostatique

1 Calculs de champs $\vec{E}$ créés par une distribution de charge

1. Symétries et invariances

Soit un point M quelconque. Étudions les propriétés du champ électrostatique au point M.

Tout plan passant par M et contenant le vecteur $(O, \overrightarrow{u}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de charge.
Comme le champ électrostatique est un vecteur polaire, il appartient, au point M, à tout plan de symétrie passant par M.
On en déduit que le champ appartient à l'intersection des plans de symétrie passant par M

$$\overrightarrow{E}(M) = E(M)\ \overrightarrow{u}_z$$

Par ailleurs, la distribution de charges est invariante par translation suivant les vecteurs $\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{u}_y$. Le champ électrostatique ne dépend donc ni de x, ni de y.

Finalement, on trouve

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = E(z)\overrightarrow{u}_z}$$

Soit un point M appartenant au plan $z = 0$. Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie pour la distribution de charge comme pour la distribution de courant.

Le champ électrostatique étant un vecteur polaire, il appartient, au point M, à tout plan de symétrie passant par M. Or la question précédente a montré que $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u}_z$. En $z = 0$, $\overrightarrow{E}$ est perpendiculaire à un plan de symétrie, ce qui n'est possible que si

$$\boxed{\overrightarrow{E}(z = 0) = \overrightarrow{0}}$$

2. Calcul du champ électrostatique

On cherche le champ électrostatique en un point M quelconque de l'espace de cote z.

Choisissons comme surface fermée Σ un cylindre droit (on aurait tout aussi bien pu prendre un parallélépipède rectangle), de section S, perpendiculaire au plan $z = 0$ dont la face inférieure est dans le plan $z = 0$ et la face supérieure passe par M (voir figure 1).

Le théorème de Gauss appliqué à Σ s'écrit

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Mais le flux sortant du champ à travers Σ se décompose en une somme des flux sortants à travers la base inférieure S_{inf}, à la base supérieure S_{sup} et à la surface latérale S_L

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_{\text{inf}}} \overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS} + \iint_{S_{\text{sup}}} \overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS} + \iint_{S_L} \overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS}$$

La normale étant sortante, on en déduit l'orientation des éléments de surface

$$\begin{array}{rcl} S_{\text{sup}} & \longleftrightarrow & \overrightarrow{dS} = dS\,\overrightarrow{u}_z \\ S_{\text{inf}} & \longleftrightarrow & \overrightarrow{dS} = -dS\,\overrightarrow{u}_z \\ S_L & \longleftrightarrow & \overrightarrow{dS} \perp \overrightarrow{u}_z \end{array}$$

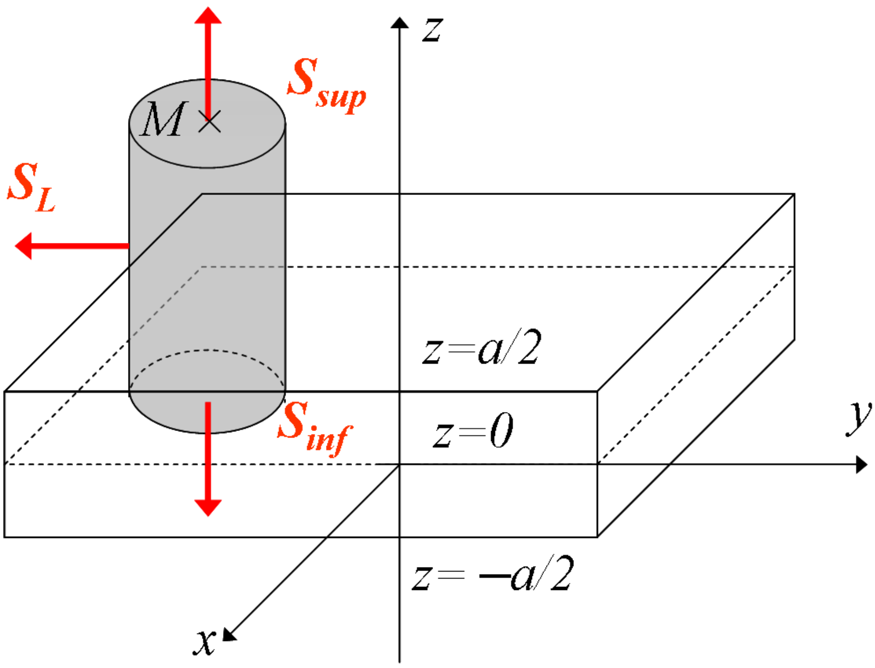


FIGURE 1 – Choix d'une surface de Gauss pour le calcul du champ électrostatique. On aurait également très bien pu choisir un paralélépipède rectangle, ou même utiliser la symétrie par rapport au .

On en déduit

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS} = E(z)S - E(z=0)S = E(z)S \qquad \text{car} \quad E(z=0) = 0$$

La charge intérieure contenue dans Σ vaut

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \rho S z, & \text{si } 0 < z < \dfrac{a}{2}\,; \\ \rho S \dfrac{a}{2}, & \text{si } \dfrac{a}{2} < z. \end{cases}$$

On en déduit l'expression du théorème de Gauss

$$E(z)S = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\epsilon_0} S z, & \text{si } 0 < z < \dfrac{a}{2}\,; \\ \dfrac{\rho}{\epsilon_0} S \dfrac{a}{2}, & \text{si } \dfrac{a}{2} < z. \end{cases}$$

Le champ électrostatique vaut donc, pour $z > 0$,

$$\boxed{E(z) = \begin{cases} \dfrac{\rho z}{\epsilon_0}, & \text{si } 0 < z < \dfrac{a}{2}\,; \\ \dfrac{\rho a}{2\epsilon_0}, & \text{si } \dfrac{a}{2} < z. \end{cases}}$$

En choisissant une surface de Gauss Σ' symétrique de la précédente par rapport à $z = 0$, on trouve, pour $z < 0$

$$\oiint_{\Sigma'} \overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS} = -E(z)S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \begin{cases} -\dfrac{\rho S z}{\epsilon_0}, & \text{si } -\dfrac{a}{2} < z < 0\,; \\ \dfrac{\rho S a}{2\epsilon_0}, & \text{si } z < -\dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

Finalement, on trouve

$$\boxed{E(z) = \begin{cases} \dfrac{\rho z}{\epsilon_0}, & \text{si } -\dfrac{a}{2} < z < 0\,; \\ -\dfrac{\rho a}{2\epsilon_0}, & \text{si } z < -\dfrac{a}{2}. \end{cases}}$$

On aurait pu également utiliser le fait que le champ électrique est impair :

$$E(-z) = -E(z)$$

. Ceci s'interprète à l'aide de la figure ci-dessous, dans laquelle on a représenté le **champ électrostatique symétrique par rapport au plan** $z = 0$ car c'est également un plan de symétrie de la distribution de charge.

$$E(z) \times (\overrightarrow{u}_z) = E(-z) \times \underbrace{(-\overrightarrow{u}_z)}_{\text{symétrique de } \overrightarrow{u}_z} \qquad \Rightarrow \qquad E(-z) = -E(z)$$

On retrouve bien le même résultat.

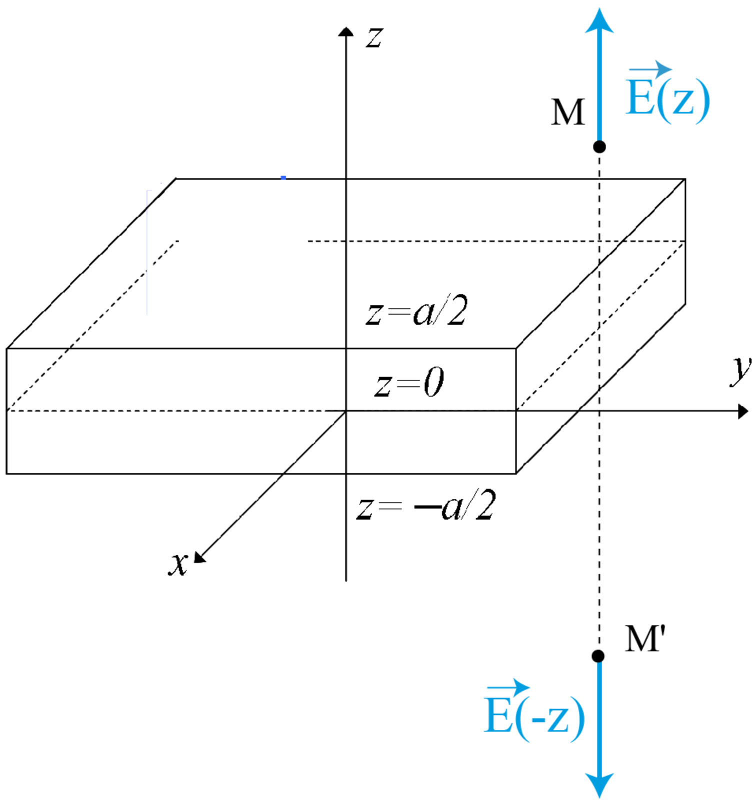
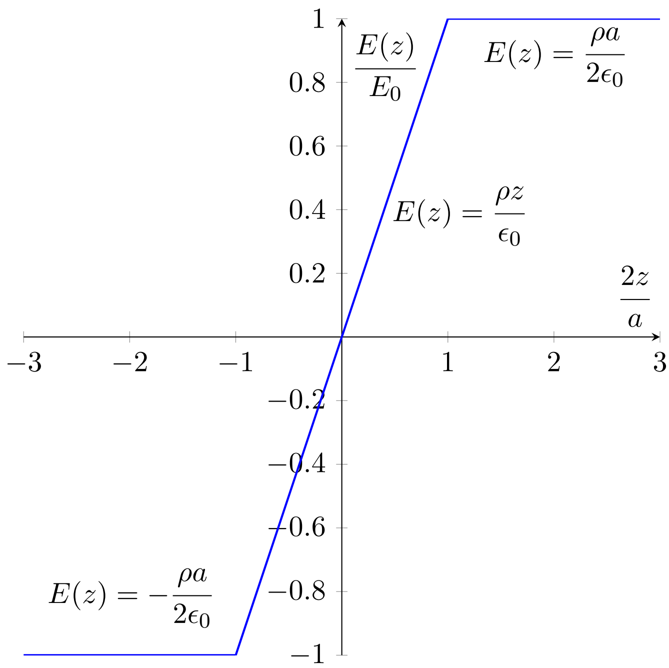


Figure 2 – Utilisation de la symétrie de la distribution de charge par rapport au plan $z = 0$.

On note $E_0 = \dfrac{\rho a}{2\epsilon_0}$. La figure ci-dessous représente le graphe de $E(z)$ en fonction de $z/(a/2)$.



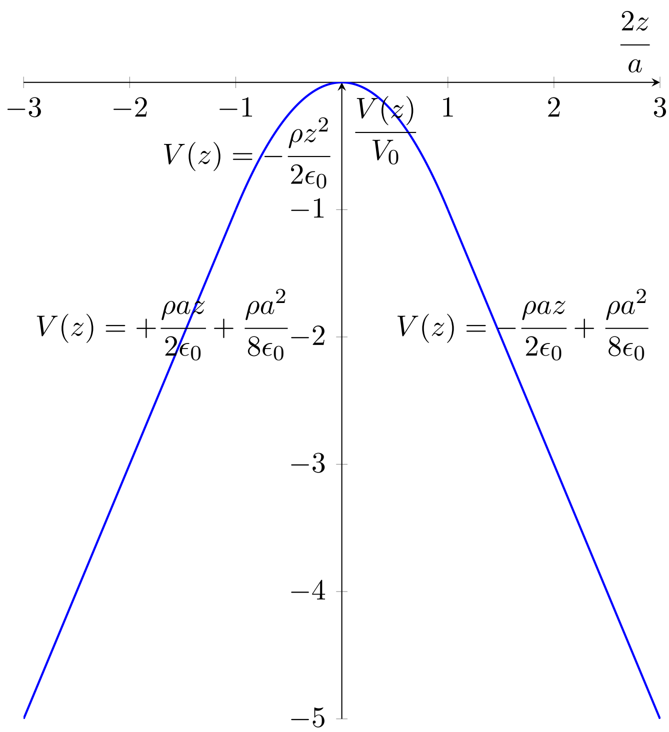
Globalement, le champ électrostatique diverge à partir des sources (charges) et est bien continu car il n'existe pas de charges surfaciques.
Finalement, le champ électrique s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \begin{cases} \frac{\rho a}{2\epsilon_0}\overrightarrow{u}_z, & \text{si } z > \frac{a}{2} \\ \frac{\rho z}{\epsilon_0}\overrightarrow{u}_z, & \text{si } -\frac{a}{2} < z < 0 \\ -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}\overrightarrow{u}_z, & \text{si } z < -\frac{a}{2} \end{cases}}$$

3. Calcul du potentiel électrostatique
En utilisant $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$ et en fixant $V = 0$ en $z = 0$, on obtient bien en utilisant la continuité du potentiel en $V = \pm\frac{a}{2}$:

$$V = \begin{cases} C_1 - \frac{\rho a z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}, & \text{si } z > \frac{a}{2} \\ C_1 - \frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}, & \text{si } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ C_1 + \frac{\rho a z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}, & \text{si } z < -\frac{a}{2} \end{cases}$$

On représente la courbe dans le cas où $C_1 = 0$, et on pose $V_0 = \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$.



$\frac{2z}{a}$
-3 -2 -1 1 2 3
$\frac{V(z)}{V_0}$
$V(z) = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}$
$V(z) = +\frac{\rho a z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$
$V(z) = -\frac{\rho a z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$
-1 -2 -3 -4 -5