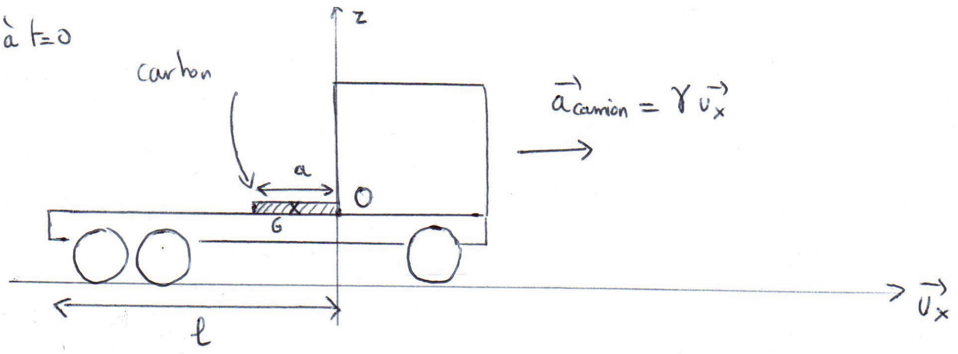
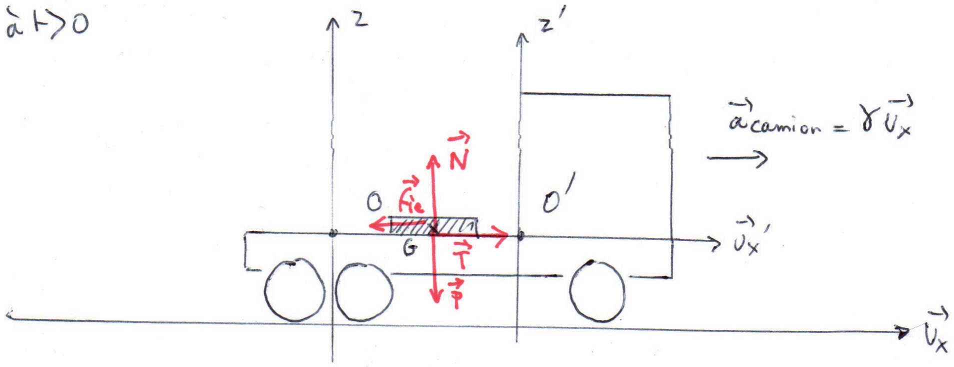
TD n°4 - Correction des exercices en autonomie

1 Démarrage d'un camion

1) à $t=0$



à $t>0$



On utilisera les 2 référentiels suivants : → R_g : référentiel lié au sol, supposé galiléen

→ R_c : référentiel du camion, non galiléen car accéléré.

Dans le cas où le carton glisse sur la plate-forme, d'après les lois de Coulomb, $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$, or le PFD s'écrit pour le carton dans le référentiel R_c non galiléen :

$$m\vec{a}(G)_{/R_c} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} + \underbrace{\vec{f}_{ic}}_{=\vec{0} \text{ car } R_c \text{ en translation}/R_g}$$

$\Rightarrow$ sur $\vec{u}_z'$: $m\ddot{z}' = 0 = -mg + N$ — le carton reste en contact avec le plateau avant la chute.

sur $\vec{u}_x'$: $m\ddot{x}' = T - m\gamma$

Remarque : $\vec{T}$ a été orientée vers l'avant, puisque $\vec{v}_g \,/\!/ -\vec{u}_x' \Rightarrow \vec{T} \,/\!/ +\vec{u}_x'$ d'après les lois de Coulomb.

S'il y a glissement, on en déduit donc :

$$\boxed{\ddot{x}' = fg - \gamma}$$

Eq du mouvement du carton dans R_c avec glissement.

et pour qu'il y ait effectivement glissement, il faut que le carton parte vers l'arrière du camion dans R_c, soit $\ddot{x}' < 0$

2) Il y a glissement dès le démarrage du camion jusqu'à la chute du carton si $\ddot{x}' < 0$, soit si $\boxed{\gamma > f g}$.

Cette condition impose le glissement pendant tout le mouvement car $fg - \gamma$ est une constante.

Ceci est cohérent avec un glissement pour des frottements faibles et/ou une accélération importante, qui "laisserait sur place" le carton.

3) Le carton tombe lorsqu'il a parcouru la distance $\Delta L = \ell - \frac{a}{2}$ dans le référentiel R_c vers l'arrière, or :

$$\ddot{x}' = fg - \gamma \Rightarrow \dot{x}' = (fg - \gamma)t + 0$$

↳ pas de vitesse initiale dans R_c

$$\Rightarrow x' = \frac{(fg-\gamma)t^2}{2} - \frac{a}{2}$$

↳ car choix de l'origine des positions au bout de la plate-forme.

$$\Rightarrow \Delta L = \left|\left(x'(t_c) - x'(0)\right)\right| = \left|\frac{(fg-\gamma)t_c^2}{2}\right| = \ell - \frac{a}{2}$$

$\Rightarrow$ Le carton chute à la date $\boxed{t_c = \sqrt{\frac{2\left(\ell - \frac{a}{2}\right)}{\gamma - fg}} = \sqrt{\frac{2\ell - a}{\gamma - fg}}}$.

4) La distance parcourue par le camion s'obtient par intégration de l'accélération du camion dans R_g :

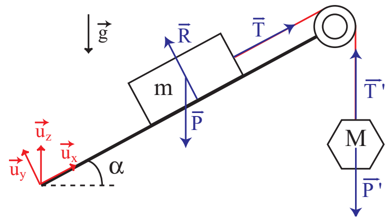
$$\vec{a}_{c/R_g} = \gamma \vec{u}_x \Rightarrow \vec{V}_{c/R_g} = \gamma t \vec{u}_x + \vec{0}$$

↳ pas de vitesse initiale dans R_g.

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta L_c}_{\text{distance parcourue par le camion}} = \frac{\gamma t_c^2}{2} = \frac{\gamma}{2} \times \frac{2\left(\ell - \frac{a}{2}\right)}{\gamma - fg} = \boxed{\frac{\gamma}{\gamma - fg}\left(\ell - \frac{a}{2}\right)}$$

or $\frac{\gamma}{\gamma - fg} > 1$ donc le camion parcourt bien une distance plus grande que celle du carton : le carton tombera donc en avant de son point de départ dans R_g d'une distance $d = \Delta L_c - \Delta L = \left(\ell - \frac{a}{2}\right)\left[\frac{\gamma}{\gamma - fg} - 1\right] = \frac{fg}{\gamma - fg}\left(\ell - \frac{a}{2}\right) > 0$.

2 Masse sur un plan incliné



1. a. Appliquons un bilan des forces à la masse m :
   - Le poids $\overrightarrow{P}$ dirigée suivant $-\vec{u}_z$
   - La réaction du plateau $\overrightarrow{R}$ dirigée suivant $\vec{u}_y$ (la réaction est normale au support car il n'y a pas de frottement).
   - La tension du fil $\overrightarrow{T}$ dirigée suivant $\vec{u}_x$.

   Le PFD appliqué à m dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen donne :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}$$

   A l'équilibre, $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$. En projection sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, on obtient :

$$-Psin\alpha + T = 0$$
$$-Pcos\alpha + R = 0$$

   Or en appliquant le PFD à la masse M dans le même référentiel, on montre de façon évidente qu'à l'équilibre, $\vec{T'} + \vec{P'} = \vec{0}$, et donc que $T' = Mg$. Et en utilisant le fait que la tension se conserve le long du fil en présence d'une poulie parfaite, $T = T'$. On a donc équilibre pour $\boxed{M_{eq} = msin\alpha}$. On vérifie bien que $M_{eq} \leq m$, et que $M_{eq} = m$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

   b. En présence de frottement, le PFD projeté sur les mêmes axes que précédemment donne

$$-Psin\alpha - R_T + T = 0$$
$$-Pcos\alpha + R_N = 0$$

   avec $|R_T| \leq fR_N = fmgcos\alpha$ pour la condition de non glissement, on en déduit $|Mg - mgsin\alpha| \leq mgfcos\alpha$, soit

$$\boxed{m\left(-fcos\alpha + sin\alpha\right) < M'_{eq} < m\left(fcos\alpha + sin\alpha\right)}$$

   On vérifie bien que pour $f = 0$, on retrouve $M'_{eq} = M_{eq}$. De plus, $M'_{eq} > M_{eq}$, ce qui est cohérent.

2. a. En l'absence de frottement, le PFD projeté sur l'axe x s'écrit maintenant $m\ddot{x} = -Psin\alpha + T$, et en appliquant le PFD à M, on obtient : $M\ddot{z} = -M\ddot{x} = T - Mg$, soit $T = Mg - M\ddot{x}$. Finalement :

$$\ddot{x} = \frac{(M - msin\alpha)\,g}{M + m}$$

   On retrouve bien l'équilibre pour $M = M_{eq} = msin\alpha$. En intégrant cette relation, sachant que $x(t = 0) = 0$, et $v(t = 0) = 0$, on obtient : $\boxed{x = \frac{1}{2}\frac{(M - msin\alpha)gt^2}{m + M}}$. Le mouvement de la masse m est donc un mouvement rectiligne uniformément accéléré soit vers les $x > 0$ si $M > M_{eq}$, soit vers les $x < 0$ si $M < M_{eq}$.

   b. $\boxed{x = \frac{1}{2}\frac{(M - msin\alpha \pm mfcos\alpha)gt^2}{m + M}}$, et le mouvement de la masse m est encore un mouvement rectiligne uniformément accéléré soit vers les $x > 0$ si $M > M'_{eq}$, soit vers les $x < 0$ si $M < M'_{eq}$. Le $\pm$ dépend du sens de parcourt et change le sens de la force de frottement.

3 Expérience de Timochenko

1. Considérons le système $\{P\}$.
   Soit $\overrightarrow{R}\,(\mathcal{C}_1 \to P) = N_1\vec{e}_z + T_1\vec{e}_x$ la résultante de l'action de contact de $\mathcal{C}_1$ sur P appliquée en I_1

Soit $\overrightarrow{R}(\mathcal{C}_2 \to P) = N_2\vec{e}_z + T_2\vec{e}_x$ la résultante de l'action de contact de $\mathcal{C}_2$ sur P appliquée en I_2
Le théorème de la résultante cinétique appliqué à P dans $\mathcal{R}$ supposé galiléen s'écrit :

$$m\overrightarrow{a}(G/\mathcal{R}) = \overrightarrow{R}(\mathcal{C}_1 \to P) + \overrightarrow{R}(\mathcal{C}_2 \to P) + m\overrightarrow{g} \quad \text{d'où en projection} \begin{cases} m\ddot{x} & = T_1 + T_2 \\ 0 & = N_1 + N_2 - mg \end{cases}$$

Le théorème du moment cinétique appliqué à P par rapport à O fixe dans le référentiel galiléen du sol s'écrit :
$\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{N_1}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{N_2}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{T_1}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{T_2}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{P}\right)$ Comme la planche ne tourne pas, et tant qu'elle est en contact avec les deux rouleaux, on en déduit, en projection sur l'axe $\overrightarrow{e}_y$:

$$0 = N_1\frac{L}{2} - N_2\frac{L}{2} + xmg$$

On obtient ainsi $\boxed{N_1 = \frac{mg}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right)}$ et $\boxed{N_2 = \frac{mg}{L}\left(\frac{L}{2} + x\right)}$.
Si $x = \pm\frac{L}{2}$ alors la composante verticale d'une des réactions s'annule : la planche bascule.
Si $|x| < \frac{L}{2}$ alors $N_1 > 0$ et $N_2 > 0$: la planche reste en contact avec les cylindres (le cas ensuite).

2. Cherchons s'il y a glissement en I_1 et /ou I_2 : $\underline{\overrightarrow{v_g}(P/\mathcal{C}_1)} = \overrightarrow{v}(I_1 \in P/\mathcal{R}) - \overrightarrow{v}(I_1 \in \mathcal{C}_1/\mathcal{R}) = \underline{(\dot{x} - a\omega_0)\vec{e}_x}$
Et $\underline{\overrightarrow{v_g}(P/\mathcal{C}_2)} = \overrightarrow{v}(I_2 \in P/\mathcal{R}) - \overrightarrow{v}(I_2 \in \mathcal{C}_2/\mathcal{R}) = \underline{(\dot{x} + a\omega_0)\vec{e}_x}$
Comme $-a\omega_0 < \dot{x} < a\omega_0$, alors les deux vitesses de glissement sont nulles, et il y a donc glissement en I_1 et I_2.
$\underline{\overrightarrow{v_g}(P/\mathcal{C}_1)}$ est selon $\underline{-\vec{e}_x}$ et $\underline{\overrightarrow{v_g}(P/\mathcal{C}_2)}$ est selon $\underline{+\vec{e}_x}$
donc $\boxed{T_1 > 0}$ et $\boxed{T_2 < 0}$. Ainsi, d'après les lois de Coulomb, $\underline{T_1 = fN_1}$ et $\underline{T_2 = -fN_2}$.
3. Or on vu $m\ddot{x} = T_1 + T_2$, $N_1 = \frac{mg}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right)$ et $N_2 = \frac{mg}{L}\left(\frac{L}{2} + x\right)$. On en déduit $\ddot{x} = -\frac{2gf}{L}x$. L'équation du mouvement est de la forme $\boxed{\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 0}$ avec $\boxed{\Omega_0 = \sqrt{\frac{2gf}{L}}}$. Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique : la planche a un <u>mouvement sinusoïdal</u> de période $\frac{2\pi}{\Omega_0} = \pi\sqrt{\frac{2L}{gf}}$. La <u>mesure</u> de la période des oscillations permet ainsi d'avoir accès au <u>coefficient de frottement</u> f.
4. La puissance développée par les actions de contact est (cas de contacts ponctuels) :
$\mathcal{P} = \overrightarrow{R}(\mathcal{C}_1 \to P).\overrightarrow{v_g}(P/\mathcal{C}_1) + \overrightarrow{R}(\mathcal{C}_2 \to P).\overrightarrow{v_g}(P/\mathcal{C}_2) = \frac{fmg}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right)(\dot{x} - a\omega_0) - \frac{fmg}{L}\left(\frac{L}{2} + x\right)(\dot{x} + a\omega_0)$
d'où $\boxed{\mathcal{P} = -fmg\left(\frac{2x\dot{x}}{L} + a\omega_0\right) < 0}$, pour $|x| < \dfrac{L}{2}$ et $|\dot{x}| < a\omega_0$: de la puissance est continuellement perdue par frottement.
Pour maintenir le régime forcé, les moteurs doivent compenser cette perte.