

**Documents de cours - Magnétostatique**
**Table des matières**

<b>I Symétries et invariances du champ magnétostatique</b>	<b>1</b>
I.1 Force de Lorentz et conséquences sur la symétrie des champs . . . . .	1
I.2 Invariances par translation ou par rotation . . . . .	4
I.3 Exemple du fil infini . . . . .	4
<b>II Topographie du champ magnétostatique</b>	<b>4</b>
II.1 Lignes de champ . . . . .	4
II.2 Cartes de champ magnétostatique . . . . .	5
<b>III Propriétés de flux et de circulation du champ magnétostatique</b>	<b>7</b>
III.1 Flux du champ magnétique . . . . .	7
III.2 Circulation du champ magnétostatique - Théorème d'Ampère . . . . .	8
<b>IV Application au calcul du champ magnétostatique créé par quelques distributions de courant</b>	<b>9</b>
IV.1 Champ créé par un fil infini parcouru par un courant (détails sur feuille) . . . . .	9
IV.2 Champ créé par un conducteur cylindrique parcouru par un courant uniforme (détails sur feuille)	9
IV.3 Champ créé par un solénoïde infini (détails sur feuille) . . . . .	10
IV.4 Discontinuité du champ magnétique au niveau d'un conducteur parcouru par un courant surfacique	10
<b>V Action d'un champ magnétique permanent sur un conducteur</b>	<b>11</b>
V.1 Expérience : le rail de Laplace . . . . .	11
V.2 Effet Hall . . . . .	11
V.3 Force de Laplace . . . . .	12

**Introduction**

On rappelle que les sources de champ magnétique statique peuvent être de deux sortes :

- un courant circulant dans un conducteur, dans lequel on définit le courant comme le débit de charge à travers la section du conducteur :  $I = \frac{dq}{dt}$ .
- Lors d'une répartition volumique des charges on définit le courant comme le flux du vecteur densité de courant  $\vec{j}$  à travers la section :  $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ .
- un aimant.

L'objet de ce chapitre est d'étudier les propriétés générales du champ magnétostatique puis le lien entre les courants électriques et le champ magnétique dans le cas statique, c'est à dire dans le cas où le courant est stationnaire (indépendant du temps). Nous verrons les propriétés des aimants dans le chapitre sur les dipôles.

**I Symétries et invariances du champ magnétostatique**
**I.1 Force de Lorentz et conséquences sur la symétrie des champs**

Si les propriétés du champ émis par une distribution de charge étaient faciles à visualiser sachant que le champ diverge des charges positives et converge vers les charges négatives, il n'est pas possible de raisonner aussi simplement pour le champ magnétostatique. Il faut ainsi revenir à la "cause" du champ :

- pour le champ  $\vec{E}$ , il s'agit de la partie électrique de la force de Lorentz :  $\vec{F} = q\vec{E}$
- pour le champ  $\vec{B}$ , il s'agit de la partie magnétique de la force de Lorentz :  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

Utilisons donc le principe de Curie pour déterminer les propriétés de symétrie des champs.

a) **Champ  $\vec{E}$**  :

Considérons une distribution de charge  $\mathcal{D}$  présentant un plan de symétrie  $\Pi_{sym}$ . On envisage de placer une charge  $q$  (positive par exemple sur la figure ci-dessous) en un point  $M$  ou en son symétrique  $M'$  par rapport à  $\Pi_{sym}$ . Cette charge, appelée *particule test*, est supposée suffisamment petite pour ne pas perturber<sup>1</sup> le champ électrique produit par la distribution de charge  $\mathcal{D}$ .

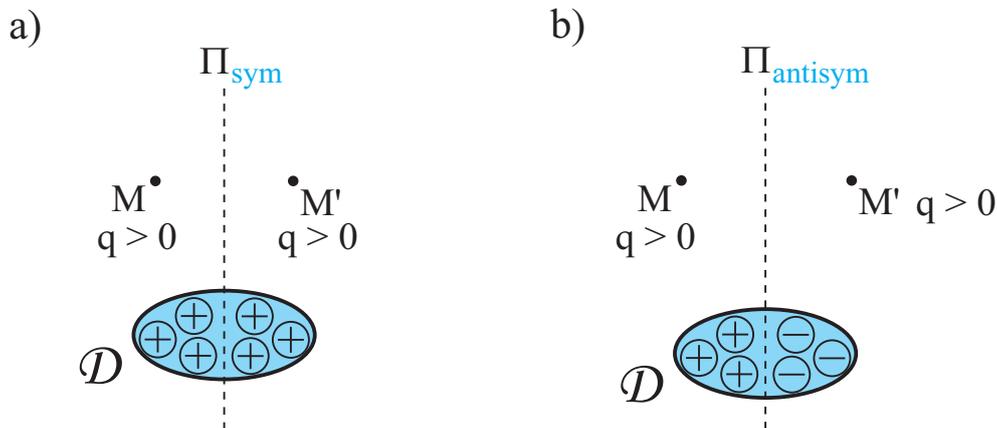


FIGURE 1 – a) Cas d'une distribution de charge symétrique par rapport à un plan  $\Pi_{sym}$ . b) Cas d'une distribution de charge antisymétrique par rapport à un plan  $\Pi_{antisym}$ .

Les effets se traduisent non pas directement par le champ électrique, mais par la force de Lorentz, réduite ici à la force de Coulomb  $\vec{F} = q\vec{E}$ . En vertu du principe de Curie, la force  $\vec{F}$  appliquée en  $M$  doit présenter au moins la symétrie des causes, c'est à dire de la distribution de charges, et donc être la symétrique de  $\vec{F}'$  obtenue en  $M'$  par rapport à  $\Pi_{sym}$ .

On en déduit directement que :

$\vec{E}(M', t)$  est le symétrique de  $\vec{E}(M, t)$  par rapport à  $\Pi_{sym}$ .

On montrerait de même que dans le cas d'un plan d'antisymétrie  $\Pi_{antisym}$  de la distribution de charge<sup>2</sup> :  $\vec{E}(M', t)$  est le symétrique de  $-\vec{E}(M, t)$  par rapport à  $\Pi_{antisym}$ .

On retrouve donc le résultat énoncé au chapitre précédent :

### Propriété

**Un champ électrique possède au moins les propriétés d'invariance et de symétrie de la distribution qui le crée.**

### Remarque

|| Un tel vecteur qui a les mêmes propriétés de symétrie que les causes est appelé un vecteur vrai ou polaire. Le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est par exemple, au même titre que le champ électrostatique  $\vec{E}$ , un vecteur vrai.

1. Ceci permet de comprendre pourquoi  $q$  n'est pas incluse dans la distribution de charge globale ; avoir deux charges symétriques dans la figure b) ne rompt donc pas l'antisymétrie globale des charges.

2. On rappelle qu'une antisymétrie vectorielle par rapport à un plan correspond à une symétrie plane puis à un changement de signe.

b) Champ  $\vec{B}$  :

Considérons maintenant une distribution de courant  $\mathcal{D}$  symétrique par rapport à un plan  $\Pi_{sym}$ . On envisage de placer en  $M$  une *particule test* de charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$ , ou en  $M'$  de même charge  $q$  et de même vitesse<sup>3</sup>  $\vec{v}$ .

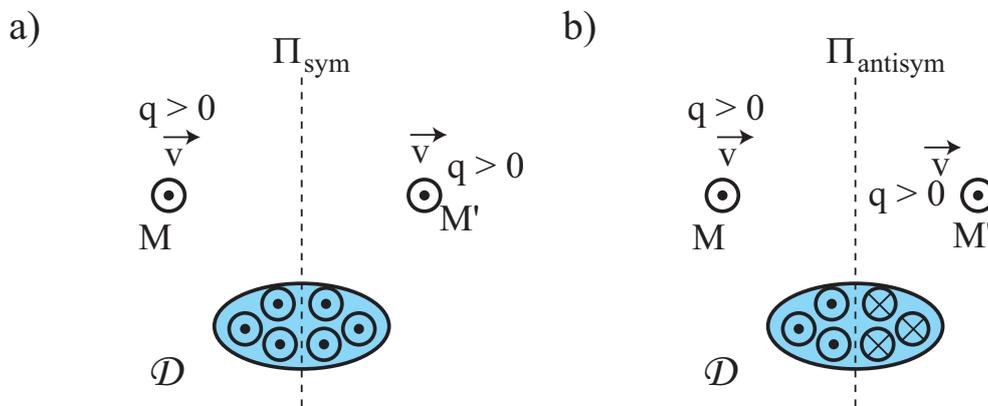


FIGURE 2 – a) Cas d'une distribution de courant symétrique par rapport à un plan  $\Pi_{sym}$ . b) Cas d'une distribution de courant antisymétrique par rapport à un plan  $\Pi_{antisym}$ .

Puisque la distribution  $\mathcal{D}$  admet  $\Pi_{sym}$  comme plan de symétrie, la composante magnétique de la force de Lorentz doit nécessairement présenter la même symétrie. Du fait de l'existence du produit vectoriel, le champ magnétique  $\vec{B}$  est nécessairement antisymétrique par rapport à  $\Pi_{sym}$ , comme le montre la figure ci-dessus.

On en déduit directement que :

$\vec{B}(M', t)$  est le symétrique de  $-\vec{B}(M, t)$  par rapport à  $\Pi_{sym}$ .

On montrerait de même que dans le cas d'un plan d'antisymétrie  $\Pi_{antisym}$  de la distribution de charge<sup>4</sup> :

$\vec{B}(M', t)$  est le symétrique de  $\vec{B}(M, t)$  par rapport à  $\Pi_{antisym}$ .

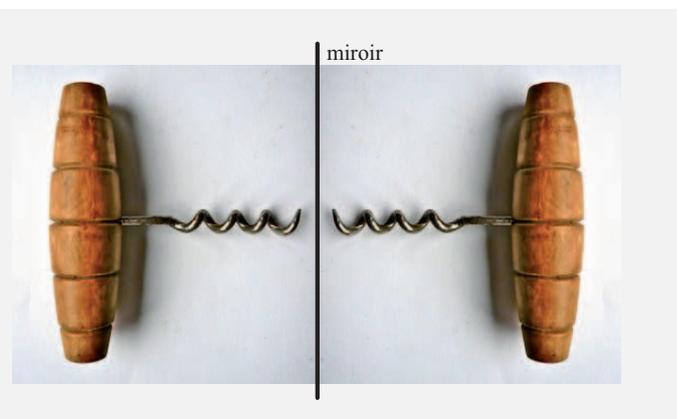
On retrouve donc le résultat énoncé en première année généralisé à un champ dépendant du temps :

### Propriété

**Les propriétés de symétrie d'une distribution de courants se traduisent par des antisymétries sur le champ magnétique créé, et vice-versa.**

#### Remarque

Un tel vecteur qui a des propriétés de symétrie contraires à celles des causes est appelé un pseudo-vecteur ou vecteur axial. Ils ont les mêmes propriétés de symétrie qu'un tire-bouchon et sont définis à partir d'un produit vectoriel de deux vecteurs vrais (comme le moment cinétique par exemple).



3. On notera que, comme précédemment, la particule a une charge très faible et ne perturbe pas le champ magnétique global.

4. On rappelle qu'une antisymétrie vectorielle par rapport à un plan correspond à une symétrie plane puis à un changement de signe.

### c) Cas particuliers

On rappelle que les propriétés de symétries précédentes permettent de remarquer que :

- si  $M \in \Pi_{sym}$ , plan de symétrie,  $\begin{cases} \vec{E}(M, t) \text{ appartient à } \Pi_{sym} \\ \vec{B}(M, t) \text{ est perpendiculaire à } \Pi_{sym} \end{cases}$
- si  $M \in \Pi_{antisym}$ , plan d'antisymétrie,  $\begin{cases} \vec{E}(M, t) \text{ est perpendiculaire à } \Pi_{antisym} \\ \vec{B}(M, t) \text{ appartient à } \Pi_{antisym} \end{cases}$

## I.2 Invariances par translation ou par rotation

### Propriété

Si la distribution  $\mathcal{D}$  des courants présente une invariance par translation ou par rotation, le champ  $\vec{B}$  créé par  $\mathcal{D}$  sera également caractérisé par ces mêmes invariances.

## I.3 Exemple du fil infini

Déterminons les dépendances et la direction du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par un fil infini d'axe  $Oz$  parcouru par un courant  $I$  ascendant, en un point  $M$  quelconque de l'espace non placé sur le fil.

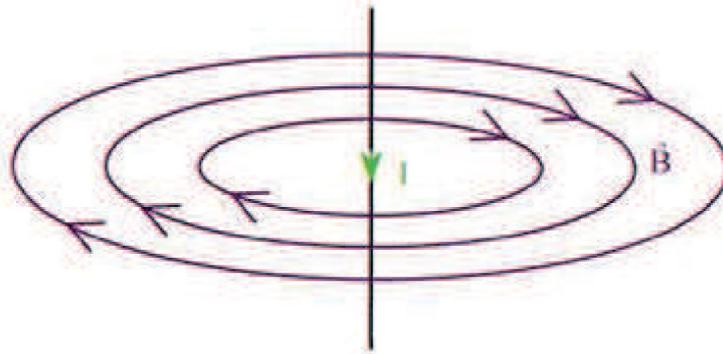
# II Topographie du champ magnétostatique

## II.1 Lignes de champ

Tout comme le champ électrostatique, le champ magnétostatique est en tout point tangent à des lignes appelées lignes de champ. On peut facilement les visualiser expérimentalement en utilisant de la limaille de fer (le fer est ferromagnétique et s'aligne sur le champ magnétostatique local comme le ferait l'aiguille d'une boussole).

### Propriété

- Les lignes de champ s'enroulent autour des courants et sont fermées. Cette propriété n'est pas vérifiée pour le champ électrostatique.
- Les lignes de champ sont orientées dans le sens positif par rapport au courant (règle de la main droite, du tire-bouchon de Maxwell ou du bonhomme d'Ampère).
- Les lignes de champ sont plus resserrées là où le champ magnétique est plus intense. Lorsque les lignes de champ sont parallèles, le champ est donc uniforme.
- $\vec{B} = \vec{0}$  à l'intersection de deux lignes de champ magnétique.



Lignes de champ créées par un fil infini parcouru par un

## II.2 Cartes de champ magnétostatique

### a) Champ $\vec{B}$ créé par une spire

La figure ci-dessus montre la carte de champ magnétostatique créée par une spire de rayon  $a$  parcourue par un courant  $I$ . On constate bien, en accord avec les résultats précédents sur les invariances et les symétries :

- une invariance par rotation autour de l'axe perpendiculaire à la spire ;
- que les lignes de champ sont perpendiculaires au plan de la spire, lui-même plan de symétrie de la distribution de courant ;
- que le champ sur l'axe de la spire est parallèle à l'axe puisque tous les plans passant par cet axe sont plans d'antisymétrie de la distribution de courant.

*Analogie d'une spire avec un aimant :*

### b) Bobines de Helmholtz

La configuration correspondant à deux spires de rayon  $R$  parcourues par un même courant, dans le même sens, distantes de leur rayon  $R$  est appelée *configuration de Helmholtz*. Elle correspond au cas où le champ est quasi-uniforme entre les deux bobines. On peut vérifier les propriétés de symétries précédentes, avec toujours la présence de lignes de champ fermées.

### c) Bobines avec courants inversés

La configuration ci-dessous permet à nouveau de vérifier les propriétés de symétries précédentes, avec toujours la présence de lignes de champ fermées.

### d) Solénoïde

Symétries et invariances :

D'après le logiciel de tracé des lignes de champ<sup>5</sup>, on voit que le champ créé par un grand nombre  $N$  de spires de même axe est :

- important et uniforme à l'intérieur du solénoïde
- quasiment nul à l'extérieur

Nous montrerons par la suite que le champ créé par un solénoïde infini parcouru par un courant  $I$ , comportant  $n = \frac{N}{\ell}$  spires par mètre est donné par :

- $B = \mu_0 n I$  à l'intérieur
- $B = 0$  à l'extérieur

Ordres de grandeur : pour une bobine typiquement utilisée en TP, au centre de la bobine, avec  $N = 1000$  spires,  $I = 0,1$  A,  $\ell = 10$  cm,

$$B \simeq$$

Cet ordre de grandeur intermédiaire est à mettre en parallèle avec le champ magnétique :

- créé par la Terre :  $B_{Terre} \simeq 50 \mu T$  (nous reviendrons sur son origine dans le chapitre sur les dipôles).
- créé par un IRM :  $B_{IRM} \simeq 6 T$ .

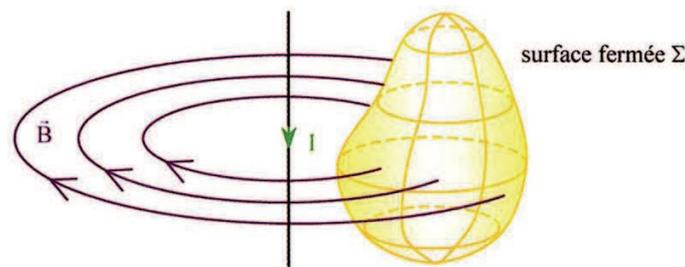
5. <https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Champs/topoB.php>

### III Propriétés de flux et de circulation du champ magnétostatique

#### III.1 Flux du champ magnétique

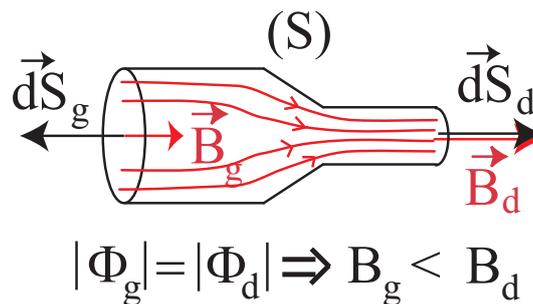
L'existence de lignes de champ fermées a une conséquence directe sur le flux du champ : toutes les lignes du champ qui entrent dans une surface doivent nécessairement en ressortir<sup>6</sup> :

$$\Phi_{\vec{B}} = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{Rappel : } \Phi_{\vec{E}} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



- Première conséquence : Conservation du flux de  $\vec{B}$  à travers un tube de champ

On appelle *tube de champ* toute surface fermée s'appuyant sur des lignes de champ, comme le montre la figure ci-dessous.



D'après ce qui précède :  $\Phi_{tot} = \Phi_g + \Phi_{lat} + \Phi_d = 0$  car la surface totale du tube est fermée.

Or d'après la définition du tube de champ,  $\Phi_{lat} = 0$ , donc  $\Phi_g = -\Phi_d$ .

De plus, d'après l'orientation des vecteurs surfaces à gauche et à droite par rapport aux lignes de champ, le flux entrant  $\Phi_{entrant} = -\Phi_g$  est négatif alors que le flux sortant  $\Phi_{sortant} = \Phi_d$  est positif. La nullité du champ total implique donc :

$$\phi_{entrant} = \phi_{sortant}$$

On dit alors que le champ magnétique est **à flux conservatif**.

Si le champ magnétique est uniforme sur une section du tube de champ, on peut alors écrire :

$$B_g S_g = B_d S_d \quad \text{soit} \quad B_g = \frac{S_d}{S_g} B_d$$

#### Propriété

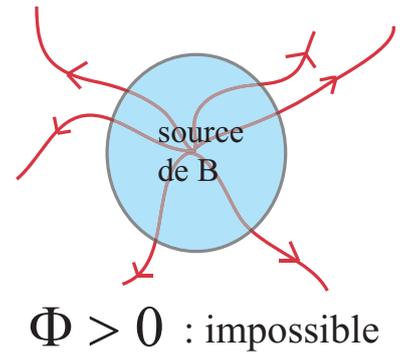
**Ceci a pour conséquence que le flux orienté dans le sens des lignes de champ est constant à travers un tube de champ (S), et donc que le champ est plus intense là où les lignes de champ se resserrent.**

6. On rappelle que ce n'est pas le cas pour le champ électrique, et que cette propriété est à l'origine de l'existence d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  (hors programme) pour le champ magnétique mais pas pour le champ électrique.

• Seconde conséquence : Non existence de monopole magnétique

Une autre conséquence est que les lignes de champ ne peuvent diverger localement autour d'un point source du champ  $\vec{B}$ , car cela serait en contradiction avec la nullité du flux de  $\vec{B}$  à travers toute surface fermée, comme le montre la figure ci-contre.

Ceci signifie qu'il ne peut exister de source de champ magnétique localisée en un point : il n'existe donc pas de **monopole magnétique**.



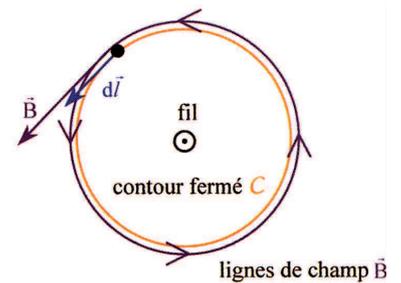
**III.2 Circulation du champ magnétostatique - Théorème d'Ampère**

La circulation du champ magnétostatique n'est pas nécessairement nulle sur un contour fermé. Pour nous en convaincre, il suffit de l'évaluer sur une ligne de champ qui enlace un fil parcouru par un courant. Le déplacement étant colinéaire au champ magnétique et de même direction en tout point, le produit scalaire entre ces deux vecteur est positif tout au long de la courbe fermée, donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} > 0 \quad \text{Rappel (en statique seulement) : } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

• Conséquence : Théorème d'Ampère

On peut montrer que cette valeur ne dépend que des courants enlacés par le contour fermé<sup>7</sup> quel que soit le contour  $C$ . C'est ce qui constitue le théorème d'Ampère.



**Théorème d'Ampère**

La circulation du champ magnétostatique sur un contour fermé et orienté est proportionnelle aux courants enlacés :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_{\text{orienté}} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

où  $(C)$  est un contour fermé et orienté, et  $(S)$  une surface quelconque s'appuyant sur  $(C)$ , et orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle de la main droite.

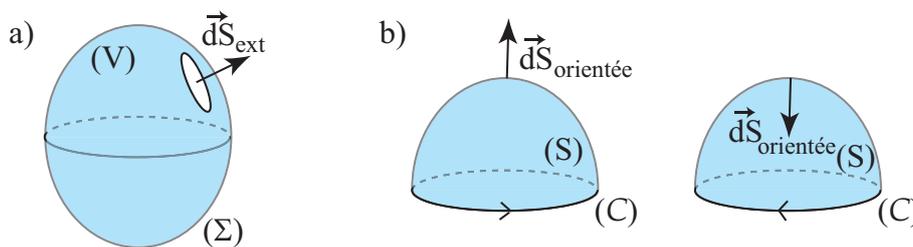
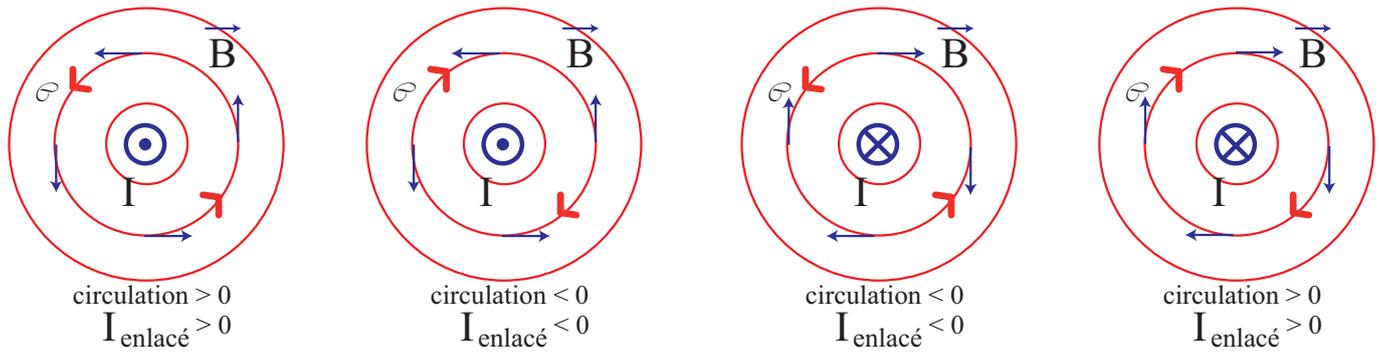


FIGURE 3 – a) Par convention, pour une surface fermée, on oriente toujours le vecteur surface élémentaire  $d\vec{S}$  vers l'extérieur de celle-ci. b) En revanche, lorsque la surface considérée est ouverte, le sens de  $d\vec{S}$  dépend de la convention choisie - qu'il faut donc préciser !- et est orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell.

Revenons à nouveau sur l'exemple du champ créé par le fil infini. On voit ici que l'orientation du contour  $C$  peut être quelconque et résulte d'un choix. Quelle que soit l'orientation du courant et l'orientation du contour, la règle imposée avec la main droite permet toujours d'obtenir des signes cohérents.

7. On rappelle que par opposition, la circulation du champ électrique sur un contour fermé en régime stationnaire est toujours nulle. Une conséquence est qu'il n'existe pas de potentiel scalaire magnétostatique dont le champ serait le gradient.



## IV Application au calcul du champ magnétostatique créé par quelques distributions de courant

### IV.1 Champ créé par un fil infini parcouru par un courant (détails sur feuille)

On considère un fil infini d'axe  $Oz$  parcouru par un courant  $I$  positif dans le sens  $z > 0$ .

D'après les symétries du problème :  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$ .

En appliquant le théorème d'Ampère à un cercle de rayon  $r$  centré sur le fil et orienté selon le vecteur  $\vec{u}_\theta$ , on obtient :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Attention, le signe du champ dépend de l'orientation du courant, mais pas du contour choisi !

### IV.2 Champ créé par un conducteur cylindrique parcouru par un courant uniforme (détails sur feuille)

On considère un cylindre infini d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$  parcouru par un courant  $I$  avec une densité volumique de courant  $\vec{j}$  uniforme dans la section du fil.

D'après les symétries du problème :  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$ .

En appliquant le théorème d'Ampère à un cercle de rayon  $r$  centré sur le fil et orienté selon le vecteur  $\vec{u}_\theta$ , on obtient :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{pour } r > R \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta & \text{pour } r < R \end{cases}$$

A l'extérieur, on retrouve le cas d'un fil infini d'axe  $Oz$  parcouru par un courant  $I$ , pour lequel on aurait négligé le rayon.

Attention, le signe du champ dépend de l'orientation du courant, mais pas du contour choisi !

On notera que le courant est continu en  $r = R$  car il n'existe pas de densité surfacique de courant.

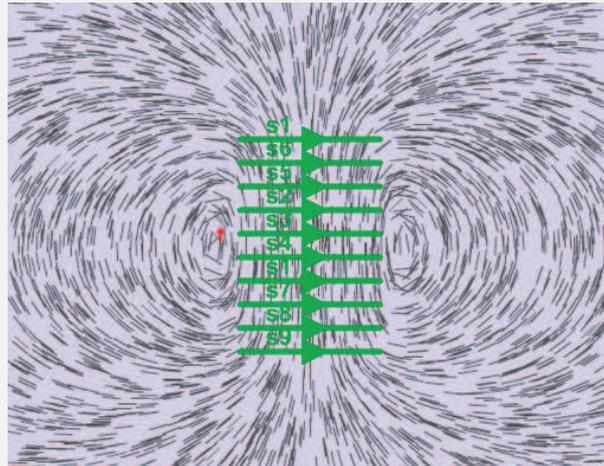
### IV.3 Champ créé par un solénoïde infini (détails sur feuille)

On considère solénoïde infini d'axe  $z$ , de rayon  $a$ , parcouru par un courant permanent  $I$  s'enroulant dans le sens positif par rapport à l'axe  $z$ , et possédant  $n$  spires par mètre.

D'après les symétries et les invariances :  $\vec{B} = B_z(r)\vec{u}_z$

#### Remarque

On remarque en utilisant le logiciel de tracé de cartes de champ magnétiques (<https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Champs/topoB.php>), que le champ magnétostatique est quasiment nul à l'extérieur du solénoïde.



En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire, "à cheval" sur le solénoïde, on montre que :

$$\begin{cases} \vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{u}_z \\ \vec{B}_{ext} = \vec{0} \end{cases}$$

Transition : On remarque qu'il existe une discontinuité de  $\vec{B}$  au niveau de la surface du solénoïde. Cette discontinuité existe à chaque fois qu'il existe une nappe de courant (présence de courants surfaciques  $\vec{j}_s$ .)

### IV.4 Discontinuité du champ magnétique au niveau d'un conducteur parcouru par un courant surfacique

On constate dans le cas du solénoïde infini qu'il existe une discontinuité du champ magnétique  $\vec{B}$  au niveau de la surface parcourue par un courant surfacique  $\vec{j}_s$  tel que  $NI = j_s L$  (on rappelle que pour une distribution surfacique, le courant s'intègre sur la section linéaire de la nappe :  $I = \int ||\vec{j}_s|| dl$ ). En effet :

$$\vec{B}(r = a^+) - \vec{B}(r = a^-) = \mu_0 n I \vec{u}_z = \mu_0 j_s \vec{u}_z$$

On peut montrer à l'aide du théorème d'Ampère (cf exercice du TD7) que la relation obtenue ici se généralise à la **relation de passage** pour toute nappe de courant parcourue par un courant surfacique  $\vec{j}_s$  séparant deux milieux notés 1 et 2 :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

où les champs sont pris au niveau de l'interface, et où  $\vec{n}_{12}$  est un vecteur unitaire normal à l'interface et dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

## V Action d'un champ magnétique permanent sur un conducteur

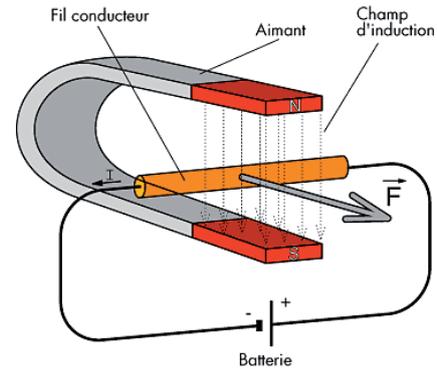
### V.1 Expérience : le rail de Laplace

On réalise l'expérience de la figure ci-contre :

- Avec  $I$ , mais sans  $\vec{B}$  (sans aimant) : la tige reste immobile.
- Sans  $I$  (interrupteur ouvert), mais avec  $\vec{B}$  : la tige reste immobile.
- Avec  $I$ , et avec  $\vec{B}$  : la tige se déplace, et le déplacement change de sens si on change le sens du courant ou du champ magnétique.

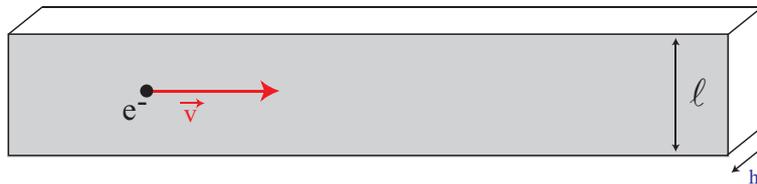
Quelle est l'origine de la force agissant sur le barreau ?

*Transition* : La seule interaction possible est de type électromagnétique, et la seule force possible est donc la force de Lorentz :  $\vec{F} = q [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]$ . Cependant, seul un champ magnétique est appliqué, et seuls les électrons sont en mouvement. Nous allons maintenant voir comment cette force qui agit seulement sur les électrons du barreau peut pourtant mettre en mouvement ce dernier.

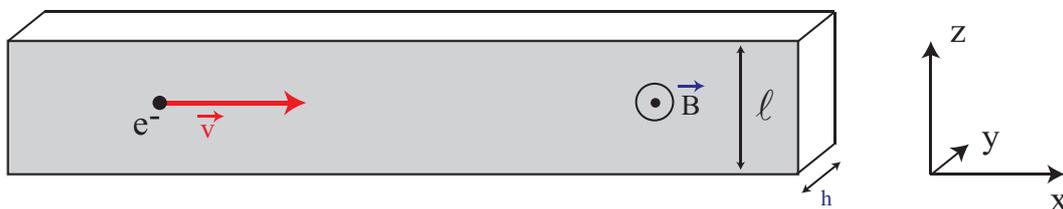


### V.2 Effet Hall

Considérons un barreau conducteur de largeur  $\ell$  et d'épaisseur  $h$  parcouru par un courant sous l'effet d'un générateur. Sans la présence de champ magnétique, les électrons de conduction se déplacent selon l'axe du barreau comme le montre la figure ci-dessous.



Lorsqu'on applique un champ magnétique transversalement par rapport à l'axe du barreau conducteur, les électrons chargés négativement sont soumis à la force de Lorentz  $\vec{F}_B = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$  et vont donc venir se "coller" à la face du "haut" (schéma ci-dessous) du bandeau, en décrivant un arc de cercle.



La face du "haut" se charge donc négativement, et il apparaît une différence de potentiel entre les deux faces du bandeau. Cela se traduit donc par l'existence d'un champ électrique orienté dans le sens des potentiels décroissants, c'est à dire vers le "haut". Ce champ est appelé champ de Hall  $\vec{E}_H$ . Cet effet a été découvert par Hall en 1879.

Les électrons sont alors soumis à une nouvelle force  $\vec{F}_E = -e\vec{E}_H$  qui vient contrer l'effet du champ magnétique puisqu'elle est orientée vers le "bas". Il s'établit alors quasi-instantanément un équilibre entre les deux forces :

$$\vec{F}_B + \vec{F}_E = \vec{0} \quad \text{soit} \quad -e\vec{v} \wedge \vec{B} - e\vec{E}_H = \vec{0} \quad \text{et donc} \quad \vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = vB\vec{u}_z$$

Ce champ correspond à une différence de potentiel  $U_H$  entre les deux faces latérales du bandeau donnée par :

$$U_H = V_+ - V_- = \int_-^+ dV = \int_-^+ \text{grad}V \cdot d\vec{\ell} = - \int_-^+ \underbrace{\vec{E}_H}_{E_H\vec{u}_z} \cdot \underbrace{d\vec{\ell}}_{-d\ell\vec{u}_z} = \ell E_H = \ell v B$$

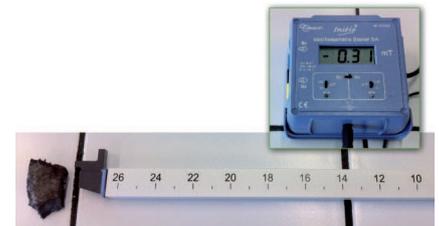
En supposant que la densité de courant  $\vec{j} = -n_e e \vec{v}$  est uniforme dans le conducteur, où  $n_e$  est la densité volumique d'électrons de conduction alors, en calculant le flux dans le sens de  $\vec{j}$ , c'est à dire dans le sens de  $-\vec{u}_x$  :

$$I = \iint_{\text{section}} \underbrace{\vec{j}}_{-n_e e v \vec{u}_x} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{-dS\vec{u}_x} = n_e e v l h \quad \text{d'où} \quad v = \frac{I}{h n_e e}$$

En remplaçant  $v$  dans l'expression de  $U_H$ , on obtient :

$$U_H = \frac{IB}{n_e e h} \quad \text{Tension de Hall}$$

On notera que cette tension peut atteindre quelques volts et est donc tout à fait mesurable. C'est notamment ce qui est utilisé dans les sondes à effet Hall qui, par la mesure de  $U_H$ , permettent de remonter à la valeur de  $B$  connaissant tous les autres paramètres.



### Effet Hall

Lorsqu'un conducteur parcouru par un courant d'intensité  $I$  est soumis à un champ magnétique  $\vec{B}$  orthogonal au conducteur, il apparaît une différence de potentiel  $U_H$ , dans une direction orthogonale à la fois au conducteur et à  $\vec{B}$ .

### V.3 Force de Laplace

Revenons maintenant à l'action de la force de Lorentz sur l'ensemble du barreau, c'est à dire sur les charges *mobiles*, les électrons, de densité volumique de charge  $\rho_{\text{mobile}} = -en_e$ , mais également sur les charges *fixes*, les ions du réseau, de densité  $\rho_{\text{fixe}} = -\rho_{\text{mobile}} = en_e$  d'après la neutralité du matériau. La force de Lorentz élémentaire  $d\vec{F}$  qui s'exerce sur un élément de volume  $d\tau$  du barreau conducteur s'écrit donc <sup>8</sup> :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= d\vec{F}_{\text{mobile}} + d\vec{F}_{\text{fixe}} \\ &= \rho_{\text{mobile}} d\tau \left( \underbrace{\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}}_{=\vec{0} \text{ à l'éq.}} \right) + \rho_{\text{fixe}} d\tau \vec{E}_H \end{aligned}$$

D'après l'étude du champ de Hall  $\vec{E}_H$ , on sait qu'à l'équilibre

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

8. On notera que cette force est nulle en l'absence de champ magnétique.

D'autre part, le volume  $d\tau$  du matériau étant globalement neutre, on a

$$\rho_{\text{mobile}}d\tau + \rho_{\text{fixe}}d\tau = 0 \quad \text{soit} \quad \rho_{\text{fixe}} = -\rho_{\text{mobile}}$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} d\vec{F}_{\text{mobile}} = \vec{0} \\ d\vec{F}_{\text{fixe}} = -\rho_{\text{mobile}}d\tau (-\vec{v} \wedge \vec{B}) = \underbrace{\rho_{\text{mobile}}\vec{v}}_{=\vec{j}} \wedge \vec{B} d\tau \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau}.$$

D'après le raisonnement précédent, on constate que la résultante des forces de Lorentz, appelée **force de Laplace**, résulte de l'action du champ de Hall sur le réseau cristallin du conducteur. Les porteurs de charge, quant à eux, sont soumis à deux forces qui se compensent : l'action du champ de Hall et la force magnétique.

## Force de Laplace

La force élémentaire de Laplace exercée sur un volume  $d\tau$  de conducteur, soumis au champ magnétique  $\vec{B}$ , a pour expression

$$\boxed{d\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau}$$

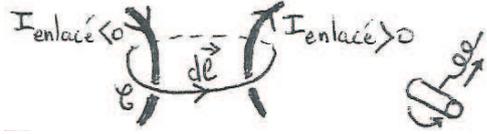
où  $\vec{j}$  est la densité volumique de courant.

Pour un conducteur filiforme,  $\vec{j}d\tau \rightarrow I\vec{d\ell}$ . On en déduit l'expression de la force élémentaire de Laplace exercée sur un élément de courant  $I\vec{d\ell}$  :

$$\boxed{d\vec{F}_L = I\vec{d\ell} \wedge \vec{B}}$$

### Remarque

|| C'est cette force qui permet d'expliquer le mouvement du barreau dans l'expérience du rail de Laplace.

	<b>Electrostatique</b>	<b>Magnétostatique</b>
<b>Distributions</b>	charge ponctuelle : $q$ densité lin. de charge : $\lambda$ densité surfacique de charge : $\sigma$ densité volumique de charge : $\rho$	monopôle magnétique n'existe pas (densité linéique de) courant : $I$ densité surf. de courant : $\vec{j}_s$ densité vol. de courant : $\vec{j}$
<b>Force exercée sur une distribution élémentaire</b>	charge ponctuelle : $d\vec{F} = dq\vec{E}$ densité lin. de charge : $d\vec{F} = \lambda d\vec{\ell}\vec{E}$ densité surf. de charge : $d\vec{F} = \sigma dS\vec{E}$ densité vol. de charge : $d\vec{F} = \rho d\tau\vec{E}$ ( <b>Force de Coulomb</b> )	charge ponctuelle : $d\vec{F} = dq\vec{v} \wedge \vec{B}$ densité lin. de courant : $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ densité surf. de courant : $d\vec{F} = \vec{j}_s dS \wedge \vec{B}$ densité vol. de courant : $d\vec{F} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$ ( <b>Force de Lorentz ou Laplace</b> )
<b>Champ créé par une distribution élémentaire</b>	$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$ ( <b>Loi de Coulomb</b> )	$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 Id\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{4\pi PM^3}$ ( <b>Loi de Biot et Savart (H.P.)</b> )
<b>Propriétés de symétrie</b>	$\vec{E}$ : vecteur vrai ou polaire $\vec{E} \in \Pi_{sym}$ $\vec{E} \perp \Pi_{antisym}$	$\vec{B}$ : pseudo-vecteur ou vecteur axial $\vec{B} \perp \Pi_{sym}$ $\vec{B} \in \Pi_{antisym}$
<b>Circulation sur un contour fermé</b>	$C = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$  Cette expression est fautive en régime variable  $\vec{E}$ est à circulation conservative	$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlacé}$  Cette expression est fautive en régime variable  <b>Théorème d'Ampère</b> Orientation : règle de la main droite
<b>Flux à travers une surface fermée</b>	$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ <b>Théorème de Gauss</b>	$\Phi = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ $\vec{B}$ est à flux conservatif
<b>Potentiel</b>	Potentiel électrostatique $V$ $\vec{E} = -\vec{grad}V$  Cette expression est fautive en régime variable	Potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ (H.P.) $\vec{B} = \vec{rot}\vec{A}$ (H.P.)
<b>Continuités</b>	$V$ est toujours continu $\vec{E}$ discontinu uniquement si $\exists \sigma$	$\vec{A}$ est toujours continu (H.P.) $\vec{B}$ discontinu uniquement si $\exists \vec{j}_s$

## Questions - Magnétostatique

### Introduction

- Rappeler quelles sont les sources de champ magnétiques.

### I Symétries et invariances du champ magnétostatique

- Sur quelle grandeur physique peut-on baser le principe de Curie afin de déterminer les propriétés de symétrie des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ?
- Démontrer, en utilisant le principe de Curie, que le champ électrique est un vecteur vrai ou un vecteur polaire et que le champ magnétique est un pseudo-vecteur ou un vecteur axial.
- Quelle propriété peut on en déduire pour la direction des champs lorsque le point considéré appartient à un plan de symétrie ou d'antisymétrie ?
- Que peut-on dire des propriétés d'invariance du champ magnétique ?
- Illustrer les propriétés de symétries et d'invariance dans le cas du champ  $\vec{B}$  créé par un fil infini parcouru par un courant  $I$ .

### II Topographie du champ magnétostatique

- Définir les lignes de champ  $\vec{B}$ . Comment sont-elles orientées ? Quelle propriété les différencie notamment des lignes de champ électrique ?
- Tracer et commenter la carte de champ magnétostatique créée par une spire de rayon  $R$  parcourue par un courant  $I$ . Donner sans démonstration l'expression du champ sur l'axe de la spire (on s'aidera d'un schéma pour définir les grandeurs introduites). Faire un calcul d'ordre de grandeur du champ créé par une spire en son centre, avec  $N = 100$  spires,  $I = 1$  A et  $R = 5$  cm. Comparer cette valeur au champ créé par la Terre et par un instrument IRM.
- Qu'appelle t-on des bobines de Helmholtz ?
- En utilisant les propriétés de symétrie précédemment établies, dessiner l'allure des lignes de champs de deux spires de même axe, parcourues par des courants de même intensité mais circulant en sens contraires.

### III Propriétés de flux et de circulation du champ magnétostatique

- Pourquoi dit-on que le champ magnétique est "à flux conservatif" ? Quelles sont les conséquences pour un tube de champ ? Montrer que les lignes de champ ne peuvent diverger localement autour d'un point source du champ  $\vec{B}$ .
- Énoncer précisément le théorème d'Ampère. L'illustrer sur l'exemple du champ créé par un fil infini. Montrer que l'orientation du contour ne détermine pas le sens du champ généré, mais que ce dernier est déterminé par l'orientation réelle du courant.

## IV Application au calcul du champ magnétostatique créé par quelques distributions de courant

- Calculer le champ créé par un fil infini d'axe  $Oz$  parcouru par un courant  $I$  positif orienté dans le sens des  $z > 0$ .
- Calculer le champ créé par un conducteur cylindrique infini d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$  parcouru par un courant  $I$  avec une densité volumique de courant  $\vec{j}$  uniforme dans la section du fil.
- Calculer le champ créé par un solénoïde infini d'axe  $z$ , de rayon  $a$ , parcouru par un courant permanent  $I$  s'enroulant dans le sens positif par rapport à l'axe  $z$ , et possédant  $n$  spires par mètre. On pourra admettre que le champ est nul à l'extérieur.
- Donner la relation de passage du champ magnétique au niveau d'une nappe de courant parcourue par des courants surfaciques  $\vec{j}_s$ .

## V Action d'un champ magnétique permanent sur un conducteur

- Décrire l'expérience du rail de Laplace. Quelle force agit sur le barreau ?
- Expliquer l'origine de l'effet Hall. Citer une mesure de champ magnétique qui utilise cet effet.
- Montrer comment on peut retrouver l'expression de la force de Laplace grâce à l'interprétation de l'effet du champ de Hall sur les cations du réseau métallique du barreau.

## Conclusion

- Remplir le tableau de la page suivante.

### Extrait du programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>4.2. Magnétostatique</b>	
Vecteur densité de courant volumique. Intensité du courant. Distributions de courant volumique et linéique.	Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant volumique.
Symétries et invariances des distributions de courant.	Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère en vue de déterminer l'expression d'un champ magnétique. Utiliser une méthode de superposition. Citer quelques ordres de grandeur de valeurs de champs magnétostatiques.
Modèles du fil rectiligne infini de section non nulle et du solénoïde infini.	Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ magnétostatique créées par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution

	Electrostatique	Magnétostatique
<b>Distributions</b>	charge ponctuelle : densité lin. de charge : densité surfacique de charge : densité volumique de charge :	
<b>Force exercée sur une distribution élémentaire</b>	charge ponctuelle : densité lin. de charge : densité surf. de charge : densité vol. de charge : (Force de )	charge ponctuelle : densité lin. de courant : densité surf. de courant : H.P. densité vol. de courant : (Force de )
<b>Champ créé par une distribution élémentaire</b>	(Loi de )	H.P. (Loi de Biot et Savart)
<b>Propriétés de symétrie</b>	$\vec{E}$ : vecteur vrai ou polaire $\vec{E} \in$ $\vec{E} \perp$	$\vec{B}$ : pseudo-vecteur ou vecteur axial $\vec{B} \perp$ $\vec{B} \in$
<b>Circulation sur un contour fermé</b>	$\mathcal{C} =$ $\vec{E}$ est à	$\mathcal{C} =$ <b>Théorème d'</b> Orientation :
<b>Flux à travers une surface fermée</b>	<b>Théorème de</b>	$\vec{B}$ est à
<b>Potentiel</b>	Potentiel électrostatique $V$	Potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ H.P.
<b>Continuités</b>	$V$ est $\vec{E}$ est	$\vec{A}$ est $\vec{B}$ est