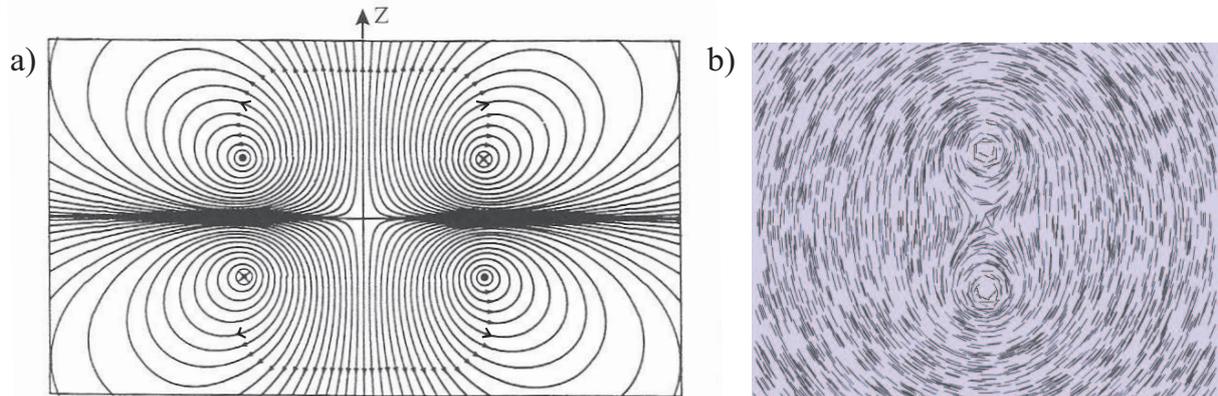


## TD n°7 - Magnétostatique

### 1 Cartes de lignes de champs

On considère les cartes de lignes de champ magnétostatique ci-dessous. La première est invariante par rotation autour de l'axe  $z$ , alors que la seconde est invariante par translation le long de l'axe perpendiculaire à la feuille.



1. Fournir le plus possible de renseignements sur les distributions de courant qui ont généré les champ des figures a) et b). Vérifier la cohérence avec les propriétés de symétrie.
2. Prédire le plus précisément possible l'allure du champ magnétostatique créé par deux fils parallèles, l'un parcouru par un courant  $2I$ , et l'autre par un courant  $-I$ .
3. Vérifier les résultats précédents en utilisant le fichier `TD-7-CartesChampB.py` disponible sur le site de la classe, permettant de tracer des lignes de champ  $\vec{B}$  et des équipotentielles (capacité numérique).

### 2 Calculs de champs $\vec{B}$ créés par des distributions de courant

En utilisant les symétries des distributions de courant et en précisant précisément le contour **orienté** choisi pour appliquer le théorème d'Ampère, montrer que le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par :

1. un fil infini sur l'axe  $Oz$  parcouru par un courant  $I$  est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

2. un cylindre infini d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$  parcouru par un courant  $I$  avec une densité volumique de courant  $\vec{j}$  uniforme dans la section du fil est donné par :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{pour } r > R \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta & \text{pour } r < R \end{cases}$$

3. une densité volumique de courant uniforme  $\vec{j} = j \vec{u}_x$  contenue entre deux plans parallèles d'équations  $z = -a/2$  et  $z = a/2$  est donné par :

$$\vec{B} = \begin{cases} -\mu_0 j \frac{a}{2} \vec{u}_y, & \text{si } z > \frac{a}{2}; \\ -\mu_0 j z \vec{u}_y, & \text{si } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}; \\ \mu_0 j \frac{a}{2} \vec{u}_y, & \text{si } z < -\frac{a}{2}. \end{cases}$$

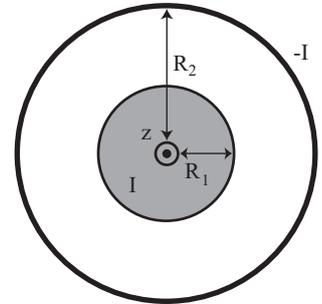
4. un solénoïde infini de rayon  $R$  d'axe  $Oz$  parcouru par un courant  $I$  et possédant  $n$  spires par unité de longueur s'enroulant autour de l'axe  $Oz$  dans le sens horaire est donné par <sup>1</sup> :

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

### 3 Câble coaxial

Un câble coaxial infiniment long, d'axe  $Oz$  est constitué :

- d'un conducteur cylindrique plein d'axe  $Oz$  et de rayon  $R_1$  parcouru par un courant constant d'intensité  $I$  (compté positivement dans le sens des  $z$  croissants) uniformément réparti dans toute la section avec une densité de courant  $\vec{j} = j \vec{u}_z$  ;
- d'un conducteur cylindrique creux d'axe  $Oz$  et de rayon  $R_2$  parcouru par des courants dont l'intensité totale vaut  $-I$  (c'est à dire un courant  $I$  dans le sens des  $z$  décroissants).



L'espace en dehors de ces conducteurs est vide.

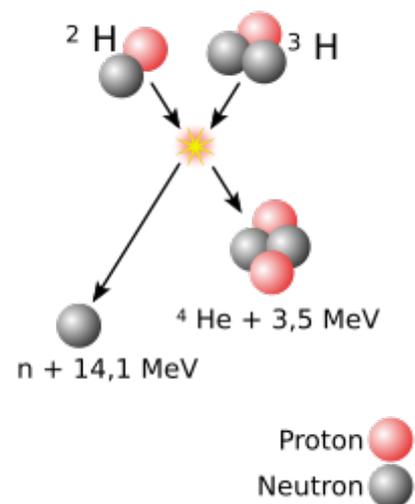
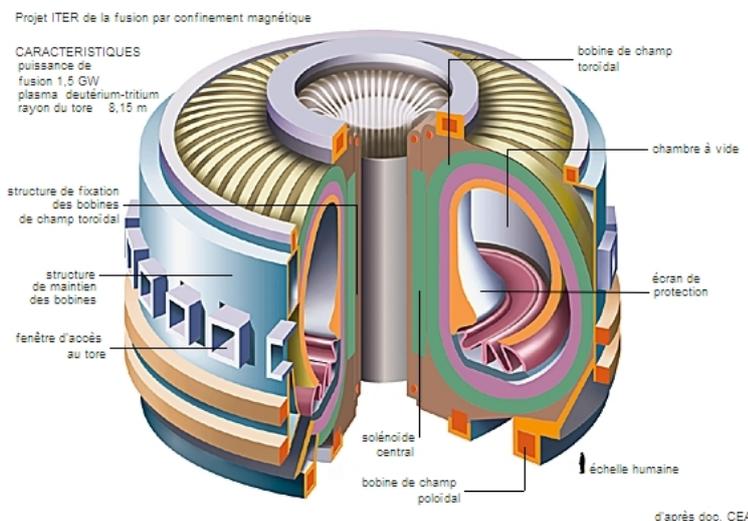
1. Exprimer le champ magnétostatique créé en tout point de l'espace (on ne cherchera toutefois pas à calculer le champ juste au niveau du cylindre de rayon  $R_2$ ).
2. Ce champ est associé à une densité volumique d'énergie  $\frac{dU_m}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}$ .

Exprimer l'énergie correspondante pour une longueur  $h$  de câble. En déduire, par analogie avec le cas d'une bobine, l'expression de l'inductance propre  $L$  d'une portion de longueur  $h$  du câble. Calculer l'inductance linéique  $\mathcal{L}$  pour  $R_1 = 1mm$  et  $R_2 = 2.7mm$ .

Réponse : 2.  $\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{8\pi} \left[ 1 + 4ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \right] = 2,5 \cdot 10^{-7} H.m^{-1}$

### 4 Bobine torique

Un tokamak est une installation en forme de tore visant à produire de forts champs magnétiques. Le projet ITER (cf Figure de gauche ci-dessous) est un tokamak expérimental pour la fusion inertielle, actuellement en construction à Cadarache (France). La fusion inertielle consiste à fusionner des atomes légers comme le deutérium ou le tritium (cf Figure de droite ci-dessous) de façon à produire de grandes quantités de chaleur, convertibles en électricité.



1. On pourra admettre que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

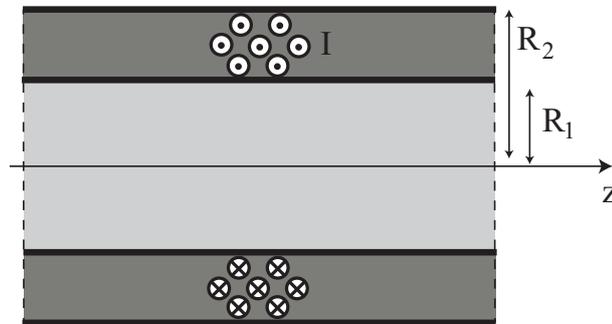
Le tokamak est un tore d'axe  $z$  dont les sections par des plans contenant l'axe  $z$  sont représentées sur la figure précédente à gauche. Le tore est entouré par  $N$  spires verticales géantes entourant les sections du tore. Ces dernières sont traversées par un courant  $I$ . Il se crée ainsi un champ magnétique dit "toroïdal".

1. Déterminer les symétries et invariances du champ magnétique toroïdal.
2. Calculer l'expression du champ magnétique créé par ce solénoïde torique en tout point de l'espace. le résultat dépend-il de la forme des spires ?
3. Dans le tokamak ITER, le grand rayon mesure  $R = 6.2 \text{ m}$  et le champ toroïdal doit être porté à  $5.3 \text{ T}$  afin d'amorcer la fusion inertielle. Quelle doit être l'intensité totale  $I_{tot} = NI$  dans les spires pour obtenir un tel champ toroïdal sur le cercle de rayon  $R$  ?

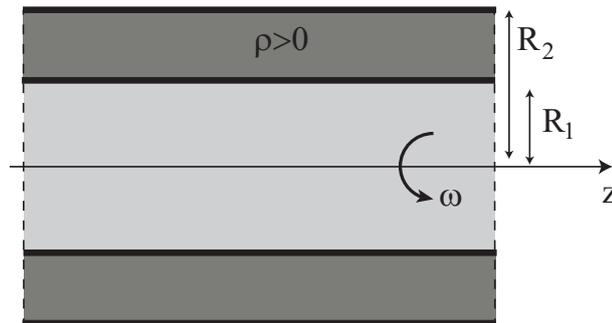
Réponse : 2.  $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{u}_\theta$  à l'intérieur du tore et  $\vec{B} = \vec{0}$  en dehors.

### 5 Solénoïde épais infini

1. On considère tout d'abord le solénoïde épais infini de la figure ci-dessous. Il est constitué de spires parcourues par un courant  $I$  enroulées entre les rayon  $R_1$  et  $R_2$ , avec  $n$  spires par mètre selon sa longueur (selon  $z$ ), et  $m$  spires par mètre selon son épaisseur (selon  $r$ ). L'intérieur est vide.



- (a) Étudier les symétries et les invariances de  $\vec{B}(M)$ .
  - (b) Calculer le champ magnétostatique dans le solénoïde ( $r < R_1$ ), en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
2. On s'intéresse maintenant à un cylindre infini uniformément chargé en volume entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$  avec une densité volumique de charges  $\rho > 0$ . Celui-ci est mis en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  constante autour de l'axe  $z$ .



- (a) Exprimer le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  ainsi créé.
- (b) Étudier les symétries et les invariances de  $\vec{B}(M)$ .
- (c) Calculer le champ magnétostatique dans le solénoïde ( $r < R_1$ ), en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
- (d) Cette distribution peut-elle être exactement équivalente à celle de la question 1°) ?

Réponses : 1.b)  $\vec{B}(r_{int}) = \mu_0 nm(R_2 - R_1)I\vec{u}_z$ , 2.c)  $\vec{B}(r_{int}) = \mu_0 \frac{\rho\omega}{2} (R_2^2 - R_1^2)I\vec{u}_z$ .

## 6 Effet Hall (🚗)

Soit un long ruban conducteur métallique d'épaisseur  $a$ , de largeur  $\ell$ , comprenant  $n^*$  électrons de conduction par unité de volume, parcouru par un courant continu  $I$  et placé dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps  $\vec{B}$ , normal au plan du ruban.

1. Montrer qu'il existe une d.d.p.  $U_H$  entre les bords du ruban, associée à un champ électrique  $\vec{E}_H$  (effet Hall). Déterminer son expression en fonction de  $I$ .
2. Une plaquette de cuivre d'épaisseur  $a = 0,1$  mm, de section  $s$  est traversée par un courant d'intensité  $I = 10$  A. Le champ magnétique perpendiculaire à la plaquette vaut 1 T. On mesure une tension de Hall de  $5,5 \cdot 10^{-6}$  V.  
Déterminer le nombre  $n^*$  d'électrons de conduction par unité de volume.  
Comparer ce nombre au nombre  $n'^*$  d'atomes par unité de volume.

Données : masse molaire du cuivre  $M = 63$  g.mol $^{-1}$  ; densité  $d = 9,0$ .

Réponses : 1.  $U_H = \frac{BI}{n^*ea}$ , 2.  $n^* = \frac{BI}{U_H ea} = 1,14 \cdot 10^{29}$  e $^-$ /m $^3$  et  $n'^* = \frac{N_A \mu_e d}{M} = 8,60 \cdot 10^{28}$  atomes/m $^3$ .

## 7 Calcul du champ magnétique créé par une spire circulaire en un point proche de son axe (🚗)

On considère une spire circulaire de rayon  $R$ , de centre  $O$ , d'axe  $Oz$  parcourue par un courant  $I$ .

1. Montrer que le champ magnétique créé en un point  $M$  de l'axe de la spire est donné par :

$$\vec{B}(M) = B_0(z) \vec{u}_z$$

Discuter de la parité de  $B_0(z)$ .

2. On cherche maintenant à exprimer le champ magnétique en un point  $M'$  au voisinage de l'axe  $Oz$ , c'est à dire avec  $r \ll R$  et  $r \neq 0$ .  
(a) Montrer que le champ magnétique créé en  $M'$  s'écrit :

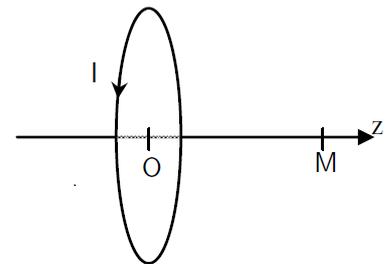
$$\vec{B}(M') = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$$

- (b) En exprimant le flux de  $\vec{B}$  à travers un cylindre d'axe  $Oz$ , de rayon  $r \ll R$  et dont les bases inférieure et supérieure sont situées aux cotes  $z$  et  $z + dz$ , montrer que, lorsque  $dz \rightarrow 0$  :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0}{dz}(z)$$

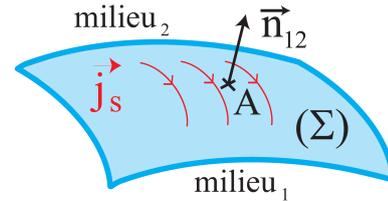
- (c) En exprimant la circulation de  $\vec{B}$  le long d'un contour rectangulaire passant par  $M'(r, z, \theta)$ , de hauteur  $dz$  et de largeur  $dr$ , lorsque  $dz \rightarrow 0$  et  $dr \rightarrow 0$ , montrer que :

$$B_z(r, z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0}{dz^2}(z)$$



## 8 Relation de passage au niveau d'une densité surfaciques de courant (🚗)

On considère une surface  $(\Sigma)$ , présentant une densité surfacique de courant  $\vec{j}_s(A)$  localement uniforme autour du point  $A$ . Celle-ci sépare deux milieux notés 1 et 2 ne présentant ni charges, ni courants.



1. En régime stationnaire :

- montrer, en utilisant que  $\vec{B}$  est à flux conservatif, que :  $\vec{B}_{2n}(A) - \vec{B}_{1n}(A) = \vec{0}$  où  $\vec{B}_{1n}(A)$  et  $\vec{B}_{2n}(A)$  sont respectivement les composantes normales à la surface  $\Sigma$  des champs magnétiques dans les milieux 1 et 2 juste au niveau de la surface, en  $A$ .
- montrer, à l'aide du théorème d'Ampère, que :  $\vec{B}_{2t}(A) - \vec{B}_{1t}(A) = \mu_0 \vec{j}_s(A) \wedge \vec{n}_{12}$  où  $\vec{B}_{1t}(A)$  et  $\vec{B}_{2t}(A)$  sont respectivement les composantes tangentielles à la surface  $\Sigma$  des champs magnétiques dans les milieux 1 et 2 juste au niveau de la surface, en  $A$ .

2. En déduire la relation de passage du champ magnétique à la traversée d'une interface sous forme compacte.