

TD n°7 - Correction des exercices en autonomie

1 Effet Hall

1. Les électrons de conduction sont soumis à une force magnétique $\vec{F}_m = q_e \vec{v} \wedge \vec{B}$.

En régime transitoire, les électrons sont déviés et s'accumulent sur une face du ruban, tandis que sur l'autre face le manque d'électron entraîne l'apparition d'une charge positive.

Cette séparation de charge entraîne l'apparition dans le ruban d'un champ électrostatique \vec{E} . Les électrons sont alors aussi soumis à une force électrique $\vec{F}_e = q_e \vec{E}$.

En régime stationnaire, les électrons ne sont plus déviés : on a $\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0$.

D'où $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \|\vec{E}_H\| = vB$ (si \vec{v} et \vec{B} sont orthogonaux).

Le champ étant uniforme, $\Delta V = \int \text{grad} V \cdot \vec{dl} = - \int \vec{E}_H \cdot \vec{dl} = - \int E_H dl = -E_H \ell$

donc la tension U_H entre les deux faces est $U_H = E_H \ell = Bv\ell$.

D'autre part, $I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint j dS = j \iint dS = ja\ell$ et $j = n^* |q_e| v$ donc $v = \frac{I}{n^* |q_e| a \ell}$. Finalement,

$$U_H = \frac{BI}{n^* |q_e| a}.$$

2. On en déduit aussi $n^* = \frac{BI}{U_H |q_e| a} = 1,14 \cdot 10^{29} \text{ e}^-/\text{m}^3$.

Or $\mu = \frac{m}{V} = \frac{nM}{N_A V} = \frac{NM}{N_A V} = n^* \frac{M}{N_A}$ avec n^* le nombre d'atomes par unité de volume.

De plus, $d = \frac{\mu}{\mu_e}$ avec $\mu_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$: masse volumique de l'eau.

On en déduit : $n^* = \frac{N_A \mu_e d}{M} = 8,60 \cdot 10^{28} \text{ atomes}/\text{m}^3$.

On a donc $\frac{n^*}{n^*'} = 1,33$ électron de conduction par atome en moyenne.

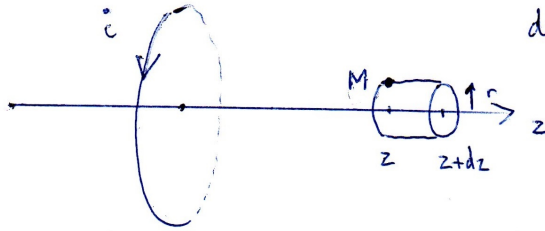
2 Calcul du champ magnétique créé par une spire circulaire en un point proche de son axe

1. Tout les plans passant par M contenant l'axe \vec{u}_z sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courant, donc \vec{B} est selon \vec{u}_z . Par ailleurs, la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ , donc \vec{B} ne dépend pas de θ . Finalement, comme r est fixé à $r = 0$, on peut écrire :

$$\vec{B}(M) = B_0(z) \vec{u}_z$$

Par ailleurs, comme le plan de la spire est un plan de symétrie de la distribution de charge, le champ magnétique est antisymétrique par rapport à ce plan, et $\vec{B}(M') = -\vec{B}(M)$, où M' est le symétrique de $M(z)$ sur l'axe, de coordonnée $-z$. La fonction $B_0(z)$ est donc paire puisque $B_0(-z) = B_0(z)$. On notera que ceci est cohérent avec l'expression finale de B_z , qui est également paire par rapport à z puisque la dérivée première n'apparaît pas dans l'expression.

2.a) $\vec{B}(M) = B_r(r,z) \vec{U}_r + B_z(r,z) \vec{U}_z$ car la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ et car $(M, \vec{U}_r, \vec{U}_\theta) = \Pi$ antisym des courants donc $\vec{B}(M) \perp \vec{U}_\theta$.



2.b) Flux de \vec{B} à travers le petit cylindre situé entre z et $z+dz$:

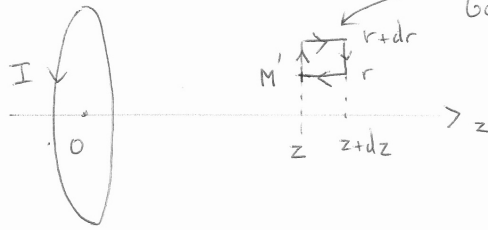
$$\Phi = \underbrace{B_z(r=0, z+dz) \pi r^2}_{\Phi(z+dz)} - \underbrace{B_z(r=0, z) \pi r^2}_{\Phi(z)} + \underbrace{B_r(r,z) 2\pi r dz}_{\Phi_{\text{lat}}} = 0$$

\uparrow
 \vec{B} à flux conservatif

$$\Rightarrow \frac{dB_z(r=0, z)}{dz} \pi r^2 = -B_r(r, z) 2\pi r$$

$$\Rightarrow \boxed{B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz}}$$

2c) On rappelle que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = 0$



pas de courant enlacé ici.

$$\text{or } \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{e} = B_r(r, z) dr + B_z(r+dr, z) dz - B_r(r, z+dz) dr - B_z(r, z) dz$$

$$\Rightarrow -\frac{dB_r}{dz}(r, z) dr dz + \frac{dB_z}{dr}(r, z) dr dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dB_z}{dr}(r, z) = \frac{dB_r}{dz}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B_0}{dz^2}$$

↑
question précédente

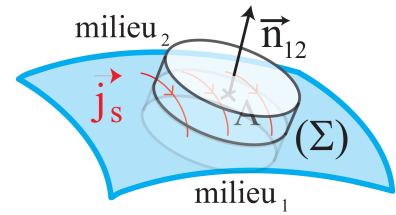
$$\Rightarrow B_z(r, z) = -\frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0}{dz^2} + \text{cste}, \text{ or } B_z(r=0, z) = B_0(z) = \text{cste}$$

$$\text{donc } B_z(r, z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0}{dz^2}$$

$$\text{Finalement : } \vec{B}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2} \vec{u}_r + \left[B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2} \right] \vec{u}_z$$

3 Relation de passage au niveau d'une densité surfaciques de courant

1. (a) Considérons une surface en forme de "boîte de camembert" avec deux faces parallèles à la surface (Σ) de surface δS suffisamment petite pour que toutes les grandeurs puissent être uniformes autour du point A .



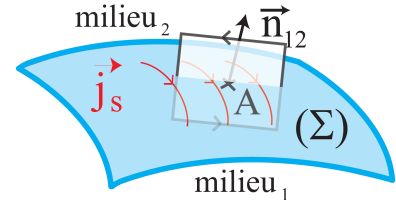
En utilisant le fait que \vec{B} est à flux conservatif, on obtient, en faisant tendre à nouveau l'épaisseur de la boîte vers 0 de sorte que le flux à travers la surface latérale tend également vers 0 :

$$\Phi_{tot} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{lat} = B_{2n}(A)\delta S - B_{1n}(A)\delta S = 0$$

Donc finalement, en divisant par δS et sachant que les grandeurs sont vectorielles :

$$\boxed{\vec{B}_{2n}(A) - \vec{B}_{1n}(A) = \vec{0}}$$

- (b) Considérons à nouveau un contour orienté "à cheval" sur la surface (Σ) de longueur dL selon la parallèle à la surface (Σ), et de longueur $d\ell$ selon la perpendiculaire à la surface, suffisamment petit pour que les grandeurs puissent être considérées comme uniformes autour du point A .



A l'aide du théorème d'Ampère appliqué au contour orienté, en régime stationnaire, pour lequel on fait tendre $d\ell$ vers 0, on obtient ¹ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_{2t}(A)dL - B_{1t}(A)dL = \mu_0 I_{enlacé} = \mu_0 j_s dL$$

où \vec{j}_s est orienté dans le sens positif avec la règle de la main droite par rapport au contour. En divisant par dL et sachant que les grandeurs sont vectorielles, on obtient :

$$\boxed{\vec{B}_{2t}(A) - \vec{B}_{1t}(A) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}}$$

2. Les relations précédentes peuvent s'écrire de façon compacte de la façon suivante :

$$\boxed{\vec{B}_2(A) - \vec{B}_1(A) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}}$$

La composante normale du champ magnétique est toujours continue, et la composante tangentielle est potentiellement discontinue.

1. Le résultat reste valable en régime variable car on fait tendre $d\ell$ vers 0 et que la composante tangentielle du champ électrique est continue.