

Corrigé CCINP épreuve spécifique Physique-Chimie MP 2022

Corrigé proposé par Laurent Millet et Julien Le Berre, pour toute remarque : laurent.millet@ac-nantes.fr

Partie I - Préparation des cosmonautes

1. On appelle **poids** sur Terre l'action du champ de pesanteur sur un objet de masse m dans le référentiel terrestre :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}_0}$$

On le détermine expérimentalement avec l'expérience du fil à plomb : on place un objet de masse m au bout d'un fil en équilibre dans le référentiel d'étude, le poids étant l'opposé de la tension du fil. Comme le référentiel terrestre est supposé galiléen, le poids contient uniquement la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre.

Remarque : Si on considère que le référentiel terrestre est non galiléen, alors le poids contient la force d'attraction gravitationnelle et la force d'inertie d'entraînement lié à l'accélération du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique.

Une **force d'inertie** est une « pseudo-force » traduisant le caractère non galiléen du référentiel d'étude. Elle s'exprime en fonction de l'accélération d'entraînement ou de Coriolis. Par exemple, la force d'inertie d'entraînement s'écrit :

$$\boxed{\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e}$$

Comme pour le poids, on définit le **poids apparent** avec l'expérience du fil à plomb. On place un objet de masse m au bout d'un fil en équilibre dans le référentiel \mathcal{R}' , le poids apparent étant l'opposé de la tension du fil. La force d'inertie de Coriolis est nulle car la vitesse relative est nulle, on obtient :

$$\vec{0} = \vec{T} + \underbrace{m\vec{g}_0 - m\vec{\gamma}_e}_{=\vec{P}_{\text{apparent}}}, \text{ soit } \boxed{\vec{P}_{\text{apparent}} = m(\vec{g}_0 - \vec{\gamma}_e)}$$

2. On se place dans le référentiel \mathcal{R}' de la « centrifugeuse » en rotation uniforme autour de l'axe Δ par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R} supposée galiléen. La **force d'inertie centrifuge** correspond à la force d'inertie d'entraînement :

$$\boxed{\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e}$$

où $\vec{\gamma}_e$ est l'accélération d'entraînement de M dans son mouvement dans \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} . On dit que cette « force » est centrifuge car elle est opposée à l'accélération d'entraînement qui est centripète.

On se place dans le référentiel \mathcal{R}' de la centrifugeuse, le poids apparent subi par le cosmonaute vaut :

$$\vec{P}_{\text{apparent}} = mg_0(\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta) + mr\omega^2\vec{u}_r$$

Le poids apparent maximal sera obtenu en $\theta = 0$ lorsque \vec{P} et \vec{f}_{ie} seront colinéaires de même sens, soit $\boxed{P_{\text{apparent}}^{\text{max}} = m(g_0 + r\omega^2)}$

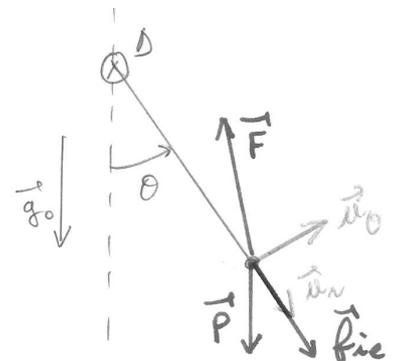
Le poids apparent minimal sera obtenu en $\theta = \pi$ lorsque \vec{P} et \vec{f}_{ie} seront colinéaires de sens contraire, soit $\boxed{P_{\text{apparent}}^{\text{min}} = m(g_0 - r\omega^2)}$

On cherche la vitesse angulaire pour que $P_{\text{apparent}}^{\text{max}} < 4mg_0$, soit :

$$P_{\text{apparent}}^{\text{max}} = m(g_0 + r\omega^2) < 4mg_0, \text{ soit } r\omega^2 < 3g_0 \text{ et donc } \boxed{\omega < \omega_{\text{max}} = \sqrt{\frac{3g_0}{r}}}$$

AN : $\boxed{\omega_{\text{max}} = 3,8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$

Remarque : A plusieurs reprises, l'énoncé donne un nombre de chiffres significatifs différents. C'est le cas dans cette question où r est fourni avec 1 CS et g_0 3 CS. On fait le compromis, ici, d'en conserver 2.



3. (a) Dans le référentiel \mathcal{R}' de l'avion (en translation non rectiligne par rapport à \mathcal{R} , ce référentiel est non galiléen), un cosmonaute C (masse m) subit un poids apparent :

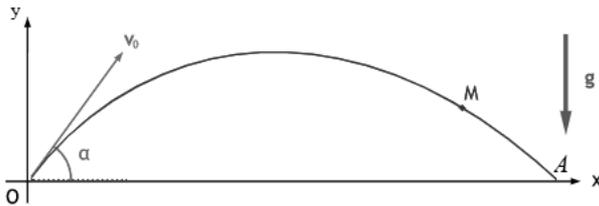
$$\vec{P}_{\text{apparent}} = m(\vec{g}_0 - \vec{\gamma}'_e)$$

On détermine l'accélération d'entraînement en déterminant l'accélération de n'importe quel point de l'avion (référentiel en translation). Pour cela, on applique le principe fondamental de la dynamique à l'avion (masse M) soumis uniquement à son poids (chute libre avec trajectoire parabolique) :

$$M\vec{a}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = M\vec{\gamma}'_e = M\vec{g}_0, \text{ ce qui donne } \vec{\gamma}'_e = \vec{g}_0$$

On en déduit que $\vec{P}_{\text{apparent}} = \vec{0}$, le cosmonaute est donc en situation d'**apesanteur** dans le référentiel de l'avion.

- (b) On représente la portion parabolique de la trajectoire de l'avion, noté M . On définit l'origine O au début de la trajectoire parabolique :



L'application du principe fondamental de la dynamique à l'avion dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$$\vec{a}(M) = \vec{g}_0$$

Par intégrations successives (en utilisant les conditions initiales), on trouve :

$$\vec{v}(M) = \vec{g}_0 t + \vec{V}_0, \text{ puis } \vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{g}_0 t^2 + \vec{V}_0 t$$

En projetant sur l'axe vertical (Oy), on trouve :

$$y(t) = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + V_0 \sin(\alpha) t$$

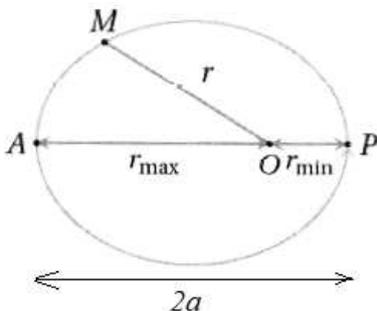
L'état d'apesanteur se termine lorsque l'avion arrive au point A . On cherche la date $t_A > 0$ (correspondant à la **durée d'apesanteur**) où l'avion atteint ce point :

$$y(t_A) = 0 = -\frac{1}{2} g_0 t_A^2 + V_0 \sin(\alpha) t_A, \text{ en gardant la solution non nulle : } t_A = \frac{2V_0 \sin(\alpha)}{g_0}$$

$$\text{AN : } t_A = 30 \text{ s}$$

Partie II - Mise en orbite de Voskhod-2

4. On représente l'allure de la trajectoire elliptique du vaisseau :



La distance minimale au foyer vaut $r_{\min} = R_T + h_{\min} = 6537$ km et la distance maximale au foyer vaut $r_{\max} = R_T + h_{\max} = 6845$ km.

$$\text{On en déduit le demi-grand axe : } a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$$

$$\text{AN : } a = 6,69 \cdot 10^3 \text{ km}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique au vaisseau V en orbite circulaire de rayon a dans le référentiel géocentrique supposé galiléen (en introduisant une base polaire) :

$$m\vec{a}(V) = -m\frac{v^2}{a}\vec{u}_r = -\frac{GmM_T}{a^2}\vec{u}_r, \text{ soit en projection } \frac{v^2}{a} = \frac{GM_T}{a^2} = \frac{g_0 R_T^2}{a^2}, \text{ ce qui donne : } v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{a}}$$

$$\text{AN : } v = 7,71 \text{ km.s}^{-1} = 2,78 \cdot 10^4 \text{ km.h}^{-1}$$

Le mouvement est circulaire uniforme (loi des aires), on en déduit la période du satellite :

$$T = \frac{2\pi a}{v}$$

AN : $T = 5.45.10^3 \text{ s} = 1,51 \text{ h}$

5. (a) Dans le référentiel géocentrique, avant le décollage, la fusée possède une vitesse non nulle associée à la rotation de la Terre. Cette vitesse correspond à la vitesse d'entraînement et est de norme $R_T \cos(\lambda)\omega_T$. On utilise la conservation de l'énergie mécanique du satellite entre le point de départ I au décollage et le point F atteint sur l'orbite circulaire (on néglige les frottements de l'atmosphère), pour déterminer l'énergie à fournir à la fusée $\mathcal{E}_{\text{fournie}}$:

$$\mathcal{E}_m(I) = \mathcal{E}_m(F), \text{ soit } \frac{1}{2}m(R_T \cos(\lambda)\omega_T)^2 + \mathcal{E}_{\text{fournie}} - \frac{GmM_T}{R_T} = -\frac{GmM_T}{2a}$$

En utilisant l'égalité $GM_T = g_0R_T^2$, on obtient :

$$\mathcal{E}_{\text{fournie}} = mg_0R_T - \frac{mg_0R_T^2}{2a} - \frac{1}{2}m(R_T \cos(\lambda)\omega_T)^2$$

AN : $\mathcal{E}_{\text{fournie}} = 3,27.10^{10} \text{ J}$

- (b) L'énergie à fournir à la fusée est beaucoup plus grande car la masse totale de la fusée est bien supérieure à celle du satellite. De plus, une partie d'énergie supplémentaire est nécessaire pour compenser la perte associée aux frottements dans l'atmosphère. On peut aussi dire qu'une partie de l'énergie est nécessaire pour la vie de l'équipage, la production de dioxygène, les communications vers la Terre ...
6. On cherche l'angle \widehat{ACB} en utilisant le triangle ABC où $BC = R_T$ et $AC = a$:

$$\widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{R_T}{a}\right)$$

La vitesse du vaisseau étant uniforme, le rapport des durées θ/T sera égal au rapport des angles parcouru :

$$\frac{\theta}{T} = \frac{2\widehat{ACB}}{2\pi}, \text{ soit } \frac{\theta}{T} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{R_T}{a}\right)$$

AN : $\frac{\theta}{T} = 0,1$

Remarque : La figure 3 de l'énoncé manque d'informations pour comprendre l'orientation de la Terre. Sur cette vue, on peut penser que le plan de l'orbite du vaisseau contient le point B , ce qui n'est pas évident.

7. Remarque : L'énoncé oublie de préciser que l'équation (1) est obtenue par une projection sur l'axe vertical ascendant.

(a) $D_m = -\frac{dm}{dt} > 0$, car la masse $m(t)$ décroît au cours du temps.

(b) Pour que la fusée puisse décoller, il faut que son accélération verticale soit positive à l'instant initial, soit :

$$-m_0g_0 - u\frac{dm}{dt} > 0$$

Le débit massique des gaz est défini par $D_m = -\frac{dm}{dt} > 0$. On en déduit la condition permettant à la fusée de décoller :

$$D_m > \frac{m_0g_0}{u}$$

(c) Le mouvement de la fusée se décompose en 2 phases :

— Phase 1 ($0 < t < t_1$) : éjection de combustible $m(t) = m_0 - m_{\text{comb}}\alpha t$

$$\frac{dv}{dt} = -g_0 + \frac{um_{\text{comb}}\alpha}{m_0 - m_{\text{comb}}\alpha t}$$

— Phase 2 ($t > t_1$) : combustible épuisée $m(t) = M$

$$\frac{dv}{dt} = -g_0$$

Pour la phase 1, on intègre l'équation différentielle entre $t = 0$ et t_1 :

$$\int_0^{t_1} \frac{dv}{dt} dt = \int_0^{t_1} \left(-g_0 + \frac{um_{\text{comb}}\alpha}{m_0 - m_{\text{comb}}\alpha t} \right) dt, \text{ soit}$$

$$v_1 - \underbrace{v(t=0)}_{=0} = -g_0 t_1 - u \left[\ln(m_0 - m_{\text{comb}}\alpha t) \right]_0^{t_1} = -\frac{g_0}{\alpha} - u \ln \left(\frac{m_0 - m_{\text{comb}}}{m_0} \right)$$

On trouve :

$$v_1 = -\frac{g_0}{\alpha} - u \ln \left(\frac{M}{M + m_{\text{comb}}} \right)$$

AN : $v_1 = 2,20 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ et $h = 126 \text{ km}$

Remarque : L'énoncé parle de deux phases du mouvement sans préciser leurs correspondances.

(d) Pour la phase 2, on intègre l'équation différentielle entre t_1 et t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dv}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} -g_0 dt, \text{ soit } \underbrace{v_2 - v_1}_{=0} = -g_0(t_2 - t_1), \text{ soit } t_2 = t_1 + \frac{v_1}{g_0}$$

AN : $t_2 = 424 \text{ s}$

On applique le théorème de l'énergie cinétique à la fusée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, entre les instants t_1 et t_2 :

$$\underbrace{\mathcal{E}_c(t_2) - \mathcal{E}_c(t_1)}_{=0} = W(\vec{P}) = mg_0(z_1 - z_2) = mg_0(h - H), \text{ soit } H = h + \frac{v_1^2}{2g_0}$$

AN : $H = 373 \text{ km}$

L'accélération de la pesanteur varie avec l'altitude z selon la loi : $g(z) = \frac{GM_T}{(R_T + z)^2}$. On calcule la variation relative du champ de pesanteur entre le sol et l'altitude H :

$$\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{g_0 - g(H)}{g_0} = 1 - \left(\frac{R_T}{R_T + H} \right)^2$$

AN : $\frac{\Delta g}{g_0} = 11 \%$: la variation relative est suffisamment faible pour pouvoir supposer le champ de pesanteur uniforme.

(e) On constate que $h < r_{\text{min}} < H$, la modélisation proposée semble compatible pour justifier que le vaisseau puisse être mis en orbite. L'ordre de grandeur de la durée entre le départ de la fusée et la mise sur orbite du vaisseau habité est compris entre t_1 et t_2 . On choisit par exemple $\Delta t \simeq 300 \text{ s}$.

8. — Sur la figure 4, on constate que la fusée décolle à 7h00. D'après la question 7d, elle met 5 minutes pour atteindre l'orbite ; et d'après la question 4, il lui faut 90 minutes pour effectuée une révolution. On en déduit qu'à la fin de la première orbite, il est environ 8h35, ce qui est tout à fait compatible avec la figure 4.
- Sur la figure 5, on constate que la manœuvre de retour commence le 19 mars à 8h35 (« retrofire »), soit 25,5 heures après le décollage. En sachant qu'une révolution est effectuée en 1,5 heure, on en déduit que le vaisseau à alors effectué 17 tours, ce qui confirme la « quinzaine de tours ».

Partie III - Début de la sortie

9. On utilise la conservation de l'énergie mécanique du capuchon dans le référentiel géocentrique, juste après que l'astronaute lui a communiqué le surplus de vitesse \vec{v}_0 . On note V la vitesse de l'astronaute sur sa trajectoire circulaire de rayon a et a' le demi-grand axe de la trajectoire elliptique du capuchon.

$$\underbrace{\frac{1}{2}m(V^2 + v_0^2)}_{\text{car } \vec{V} \perp \vec{v}_0} - \frac{GM_T m}{a} = -\frac{GM_T m}{2a'}$$

L'astronaute possède une vitesse $V = \sqrt{\frac{GM_T}{a}}$ sur sa trajectoire circulaire de rayon a , on en déduit :

$$\frac{GM_T m}{2a} + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{a} = -\frac{GM_T m}{2a'}, \text{ soit } -\frac{GM_T}{2a} + \frac{1}{2}v_0^2 = -\frac{GM_T}{2a'}$$

On en déduit le demi-grand axe a' :

$$a' = \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{v_0^2}{GM_T}}, \text{ ou encore } a' = \frac{a}{1 - \left(\frac{v_0}{V}\right)^2}$$

D'après la 3e loi de Képler, le rapport T^2/a^3 est identique pour l'astronaute et pour le capuchon, soit :

$$\frac{T_{\text{astronaute}}^2}{a^3} = \frac{T_{\text{capuchon}}^2}{(a')^3}, \text{ ce qui donne } T_{\text{capuchon}} = \frac{T_{\text{astronaute}}}{\left(1 - \left(\frac{v_0}{V}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Ces 2 périodes sont différentes, mais dans la limite où l'astronaute a communiqué un **très léger surplus de vitesse** \vec{v}_0 , on peut faire l'approximation $T_{\text{capuchon}} \simeq T_{\text{astronaute}}$.

Remarque : Nous n'avons pas compris comment utiliser la loi des aires pour répondre à cette question. On peut tout de même indiquer qu'il y a conservation du moment cinétique du capuchon avant et après que l'astronaute lui a communiqué le surplus de vitesse \vec{v}_0 . On peut alors en déduire la valeur de la constante des aires. La figure 6 semble aider le candidat à répondre à la question, mais comment ?

□ 1 – Définition du cours. $\vec{v}_g = \vec{v}_{I_2 \in \mathcal{S}_2 \mathcal{R}} - \vec{v}_{I_1 \in \mathcal{S}_1 \mathcal{R}}$

Cette relation est valable pour tout référentiel. On trouve la vitesse d'entraînement dans chaque terme de la soustraction.

□ 2 – On passe de l'adhérence au glissement dès que $T = f_s N$

□ 3 – On passe du glissement à l'adhérence dès que $\vec{v}_g = \vec{0}$ et $|T| \leq f_s N$

□ 4 – **Phase 1** : accélération de \mathcal{S}_1 car $F = \alpha mg > f_s mg$. Durant cette phase, le fil est tendu.

Phase 2 : Le solide \mathcal{S}_1 ne subit plus que $-f_g mg \vec{e}_x$ selon la direction horizontale. Le solide est freiné jusqu'à l'arrêt $\vec{v}_g = \vec{0}$. Le fil n'est plus tendu.

□ 5 – Durant la phase 1, on écrit le théorème de la résultante cinétique pour chacun des deux solides :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} F - T = m\ddot{X} \\ -mg + N = 0 \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 \begin{cases} -F + \alpha mg = \alpha m\ddot{Z} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

□ 6 – La Loi de Coulomb pour le glissement s'écrit $T = f_g N$

□ 7 – a) Le fil est inextensible donc $\dot{X} = \dot{Z}$ et $\ddot{X} = \ddot{Z}$

b) On a donc, d'après la question 5 :

$$F = -\alpha m\ddot{Z} + \alpha mg \quad \text{soit} \quad F = \alpha m(g - \ddot{X}) \quad \text{et donc} \quad m\ddot{X} = \alpha m(g - \ddot{X}) - f_g mg$$

$$\iff \ddot{X} = \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right) g$$

On intègre avec $\dot{X}(t=0) = 0$

$$\dot{X} = \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right) gt$$

c) La phase s'arrête quand $H(t) = 0$. On intègre encore une fois avec $X(t=0) = 0$:

$$X = \frac{1}{2} gt^2 \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right)$$

Le solide s'arrête lorsque $X(t_1) - X_0 = H_0 \iff X(t_1) = H_0 + X_0$ On aboutit à $t_1 = \sqrt{\frac{2H_0}{g} \frac{\alpha + 1}{\alpha - f_g}}$

d) On reporte dans $\dot{X}(t_1)$ dans b)

$$V_1 = \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right) \sqrt{2gH_0 \frac{\alpha + 1}{\alpha - f_g}} \iff V_1 = \sqrt{2gH_0} \sqrt{\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1}}$$

□ 8 – On s'intéresse maintenant à la deuxième phase du mouvement :

a) \mathcal{S}_1 subit \vec{P} et \vec{R} soit $m\ddot{X} = -f_g mg \iff \ddot{X} = -f_g g$ qu'on intègre avec $\dot{X}(t_1) = V_1$:

$$\dot{X}(t) = V_1 - f_g g(t - t_1)$$

et une seconde intégration avec $X(t_1) = H_0 + X_0$ aboutit à :

$$X(t) = V_1(t - t_1) - f_g g \frac{(t - t_1)^2}{2} + H_0 + X_0$$

b) La fin du glissement correspond à $\dot{X}(t_f) = 0 \iff (t_f - t_1) = \frac{V_1}{f_g g}$.

On a par définition $D = X(t_f) - X_0 \iff \dots D = \frac{1}{2} \frac{V_1}{f_g g} + H_0$.

De plus on a établi en 7)d) $V_1^2 = 2gH_0 \times \frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1}$.

Quelques calculs amènent à $f_g = \frac{\alpha}{1 + (\alpha + 1) \frac{D - H_0}{H_0}}$.

□ 9 – On applique le théorème de l'énergie cinétique à $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ durant la première phase. $\Delta E_c = \Delta E_{c,1} + \Delta E_{c,2} = W(\vec{P}_2) + W(\vec{T}) \iff \frac{1}{2}(\alpha + 1)V_1^2 = \alpha mgH_0 - f_g mgH_0 = mgH_0(\alpha - f_g) \iff V_1^2 = 2gH_0 \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right)$. On retrouve la relation établie dans 7)d).

On applique le TEC à \mathcal{S}_1 seul cette fois. \mathcal{S}_2 est au sol. Le fil n'est plus tendu. Seule la force de frottement travaille : $\Delta E_{c,1} = W(\vec{T}) \iff -\frac{1}{2}V_1 = -f_g mg(D - H_0)$ soit $V_1^2 = 2f_g g(D - H_0)$.

Combinant les deux résultats, on obtient $D - H_0 = H_0 \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right)$ et on retrouve $f_g = \frac{\alpha}{1 + (\alpha + 1) \frac{D - H_0}{H_0}}$

établi en 8)b).

□ 10 – On réalise l'application numérique avec $\alpha = \frac{\alpha m}{m} = \frac{60}{50} = 1,2$, $H_0 = 40$ cm et $D = 150$ cm.

$f_g = 0,46$. Ce qui est tout à fait envisageable comme ordre de grandeur.

□ 11 – Question classique de cours. On est à la limite du glissement $T = f_s N$ et ici $N = mg \cos \theta$. Le solide subit le poids et la force de frottement et est encore immobile : $mg \sin \theta = f_s mg \cos \theta \iff$

$f_s = \tan(\theta_{\text{lim}})$

□ 12 – L'application numérique donne $f_s = 0,57$. On a bien $f_s > f_g$ comme attendu.

□ 13 – Tant que la vitesse de glissement est nulle, $\vec{v} = \vec{v}_{\text{tapis}} = \vec{V}$. On a ainsi $X(t) = Vt + X_0$.

Il y a glissement dès que $T = f_s N$. Dans \mathcal{R}_T galiléen (\mathcal{R}' l'est aussi puisqu'il est en translation rectiligne uniforme dans \mathcal{R}_T galiléen), le PFD s'écrit dans \mathcal{R}_T galiléen

$$\begin{cases} -kX + T = 0 \\ -mg + N = 0 \end{cases}$$

A la limite de glissement, on a $T = f_s N = f_s mg$ et $kX_1 = f_s mg$ soit $X_1 = \frac{f_s mg}{k}$.

et $t_1 = \frac{X_1 - X_0}{V} \iff t_1 = \frac{\frac{f_s mg}{k} - X_0}{V}$.

□ 14 – Dès le début de glissement, $T = f_d N = 0$ puisque $f_d = 0$ dans notre cas.

a) L'application du PFD donne $m\ddot{X} = -kX$ soit $\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0$. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

b) \nexists force dissipative. L'énergie mécanique se conserve : $E_m = E_c + E_p$ avec $E_p = \frac{1}{2}kX^2 + E_{p,p}$ soit $E_p = \frac{1}{2}kX^2$ en prenant $E_{p,p} = 0$ à la hauteur fixe considérée. $E_c = \frac{1}{2}m\dot{X}^2$. L'énergie potentielle

est maximale quand l'énergie cinétique est nulle. On a donc $E_{m,i} = E_m(t_1) \iff \frac{1}{2}kX_1^2 + \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}kX_m^2$. On a donc la relation (homogène!) :

$$X_m^2 = X_1^2 + \frac{V^2}{\omega_0^2}$$

□ 15 – a) On translate l'origine des temps : $t = t' + t_1$. On a donc

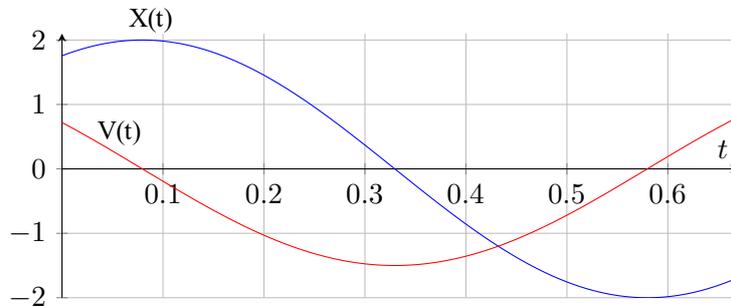
$$\begin{cases} X(t') = X_m \cos(\omega_0 t' + \varphi) \\ \dot{X}(t') = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t' + \varphi) \end{cases} \quad \begin{cases} X(t'=0) = X_1 = X_m \cos \varphi \\ \dot{X}(t'=0) = V = -\omega_0 X_m \sin \varphi \end{cases}$$

Soit $\tan \varphi = -\frac{V}{\omega_0 X_1}$

b) Le glissement s'arrête dès que $v_g = 0 \iff \dot{X}(t_2) = V$

c) Représentations graphiques. Ne pas tenir compte des graduations sur les axes. EN rouge \dot{X} et en bleu X avec une valeur arbitraire du déphasage.

En rouge, on démarre en (t_1, V) et on finit en (t_2, V) comme expliqué ci-dessus.



□ 16 – $X(t_1) \simeq X_m \implies \varphi \simeq 0 \iff \tan \varphi \simeq 0 \iff V \ll \omega_0 X_1 \iff T_0 \ll 2\pi \frac{X_1}{V}$ ce qui est

cohérent avec $X_m^2 = X_1^2 + \frac{V^2}{\omega_0^2}$ établi en 14)b).

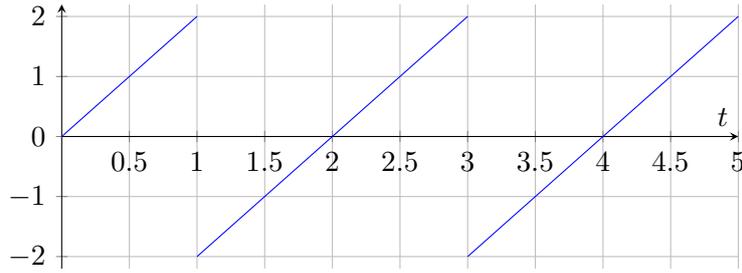
□ 17 – Dans la représentation précédente, durant le glissement, le solide passe de X_1 à $-X_1$. Soit, dans notre approximation de X_m à $-X_m$. Cela dure $T_0/2$. Il faut rajouter le temps nécessaire pour, en période de stick, aller de $-X_m$ à $+X_m$ soit $\frac{2X_m}{2}$. On a donc :

$$T = \frac{2X_m}{V} + \frac{T_0}{2}$$

Or, on est dans l'approximation $T_0 \ll \frac{X_1}{V}$ avec $X_1 \simeq X_m$. On a donc $T \simeq \frac{2X_m}{V} = \frac{2gf_s}{\omega_0^2 V}$

L'application numérique donne $\nu = \frac{kV}{2gmf_s} = 400 \text{ Hz}$

□ 18 – Représentation graphique. La durée de glissement n'apparaît plus. Elle est négligeable.



□ 19 – Phénomène usuel.

Les sons sont dans le domaine des hautes fréquences.

$k \propto 1/L \implies$ si $L \rightarrow L/2$ alors $k \rightarrow 2k \implies \nu \uparrow$. On atteint les ultrasons. Inaudibles pour l'oreille humaine.

□ 20 – Le solide frotte avec $f_d \approx 0$ ici : la force de frottement est nulle quand la vitesse de glissement ne l'est pas. La force de frottement est non nulle lorsque la vitesse de glissement est nulle. Dans les deux cas, il n'y a pas de travail de la force de frottement.