

TD n°8 - Dipôles électrostatiques et magnétiques - Correction des exercices en autonomie

1 Moteur synchrone

1. La valeur instantanée du couple magnétique $\vec{\Gamma}$ exercé par le champ sur la pièce mobile vaut :

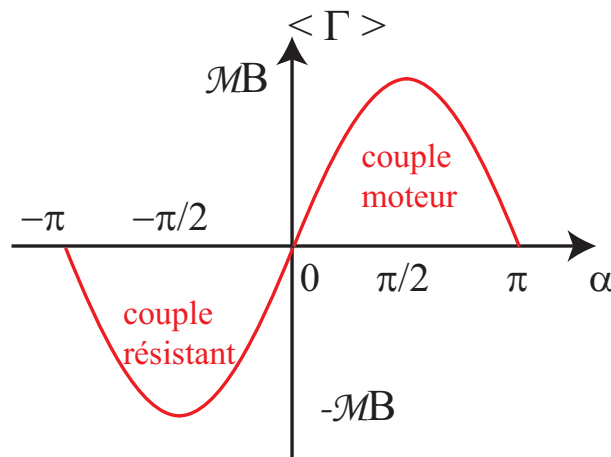
$$\vec{\Gamma} = \mathcal{M}B_0 \sin[(\omega_0 - \omega)t + \alpha] \vec{u}_z$$

La valeur moyenne de ce couple vaut :

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \vec{0} \quad \text{si} \quad \omega \neq \omega_0$$

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \mathcal{M}B \sin \alpha \vec{u}_z \quad \text{si} \quad \omega = \omega_0$$

2. Le dispositif fonctionne en moteur (c'est à dire que le champ magnétique entraîne le moment magnétique dans une rotation dans le même sens) si $\alpha \in [0; \pi]$.



Dans ce cas, la puissance maximale P_{\max} qu'il peut fournir vaut :

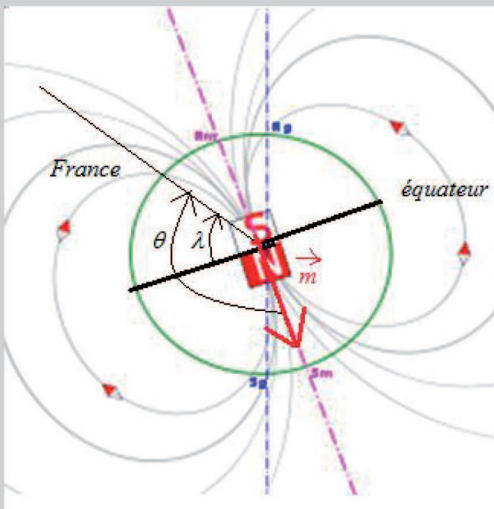
$$P_{\max} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}_0 = \mathcal{M}B_0 \omega_0 \sin \alpha$$

3. Si le moteur prend de l'avance, d'après la figure de l'énoncé, α diminue.

Si $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, le couple diminue d'après la figure précédente, donc le moteur ralentit, et il perd son avance. Le fonctionnement est donc stable.

En revanche, pour $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, le couple augmente, et le moteur accélère et prend donc encore davantage d'avance : le fonctionnement est donc instable.

2 Résolution de problème - Moment magnétique de la Terre



Un schéma montre que

$$\begin{cases} B_r = -\|\vec{B}_v\| \\ B_\theta = \|\vec{B}_0\| \end{cases}$$

D'autre part, on peut estimer la latitude de la France à $\lambda = \frac{\pi}{4}$, avec $\theta = \lambda + \frac{\pi}{2}$. Et on estime le rayon terrestre à $R_T = 6,7 \times 10^6$ m.

On peut par exemple en déduire :

$$\begin{cases} B_r \approx -\frac{2\mu_0 m \sin \lambda}{4\pi R_T^3} \\ B_\theta \approx \frac{\mu_0 m \cos \lambda}{4\pi R_T^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases}$$

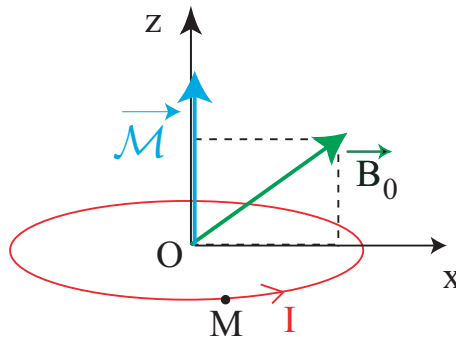
Ainsi, $B = \frac{\mu_0 m}{4\pi R_T^3} \sqrt{4 \sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda}$. On trouve donc :

$$m = \frac{4\pi B R_T^3}{\mu_0 \sqrt{4 \sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda}}$$

Application numérique : $m = 10^{22}$ A · m².

Qui est le bon ordre de grandeur.

3 Moment des forces de Laplace



Calculons le moment résultant des efforts au point O en utilisant un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_O &= \oint_C \overrightarrow{OM} \wedge (I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_0) = \int_{\theta=0}^{2\pi} R \vec{u}_r \wedge [IR d\theta \vec{u}_\theta \wedge (B_{0x} \vec{u}_x + B_{0z} \vec{u}_z)] \\ &= IR^2 B_{0x} \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{u}_r \wedge (\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_x) d\theta\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z / \vec{u}_r$ et $B_{0x} = \text{cste}$. De plus, on prendra garde à ne pas sortir les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ car ils dépendent de θ .

Le vecteur $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$ étant le vecteur tangent à la spire, on en déduit

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_O &= IR^2 B_{0x} \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{u}_r \wedge (-\cos \theta \vec{u}_z) d\theta \\ &= IR^2 B_{0x} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos \theta \vec{u}_\theta d\theta\end{aligned}$$

Comme \vec{u}_θ dépend de l'angle θ , on projette sur les axes fixes \vec{u}_x et \vec{u}_y

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_O &= IR^2 B_{0x} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos \theta [-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y] d\theta \\ &= \underbrace{I \pi R^2}_{=\mathcal{M}} B_{0x} \vec{u}_y\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la relation

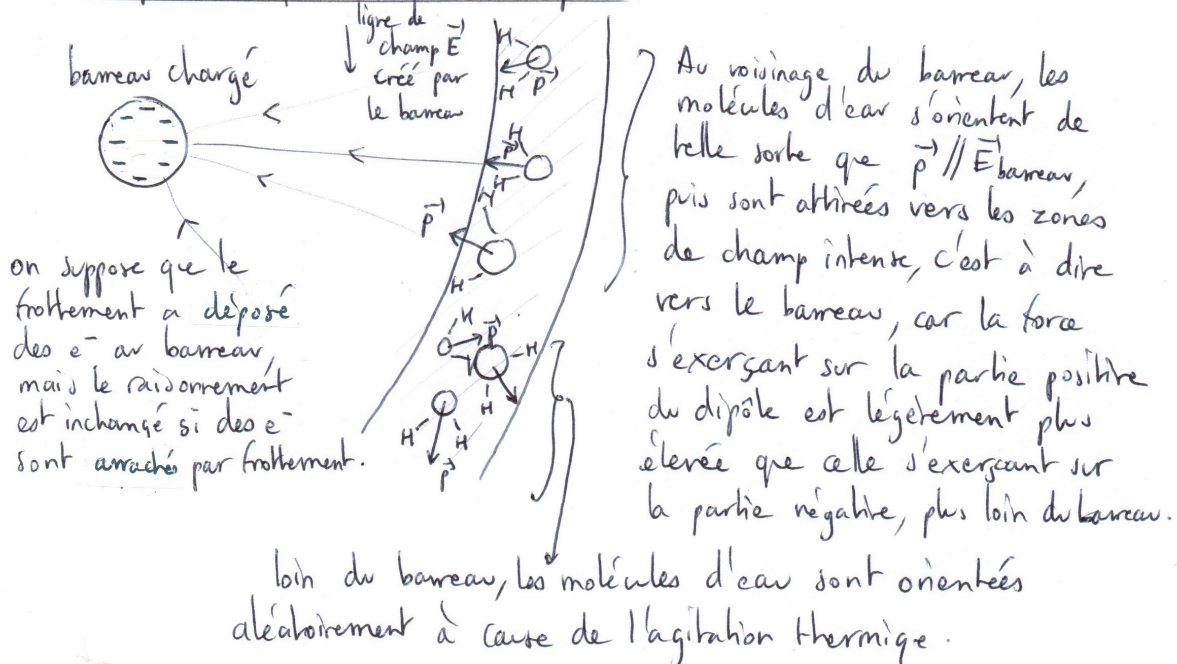
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$$

Avec $\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_0 = \mathcal{M} B_{0x} \vec{u}_y$, on retrouve bien la formule du cours

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_0$$

4 Résolution de problème - Attraction électrostatique

Interprétation qualitative de l'expérience



on suppose que le frottement a déposé des e^- au bâton, mais le raisonnement est inchangé si des e^- sont arrachés par frottement.

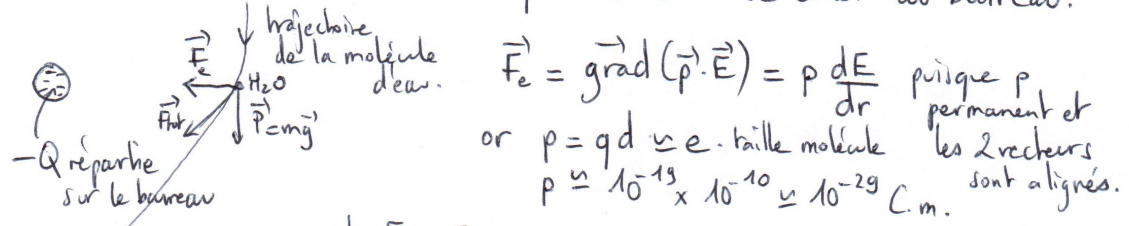
Au voisinage du bâton, les molécules d'eau s'orientent de telle sorte que $\vec{p} \parallel \vec{E}_{\text{bâton}}$, puis sont attirées vers les zones de champ intense, c'est à dire vers le bâton, car la force s'exerçant sur la partie positive du dipôle est légèrement plus élevée que celle s'exerçant sur la partie négative, plus loin du bâton.

loin du bâton, les molécules d'eau sont orientées aléatoirement à cause de l'agitation thermique.

Estimation de la charge électrique Q portée par le bâton

Méthode 1: à partir de l'estimation de la force s'exerçant sur les molécules d'eau.

D'après le schéma, cette force \vec{F}_e d'origine électrostatique est comparable au poids puisque le filet d'eau est dévié notablement, sans que les molécules d'eau ne viennent pour autant se coller au bâton.



$\vec{F}_e = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = p \frac{dE}{dr}$ puisque p permanent et les 2 vecteurs p et E sont alignés.
 or $p = qd \approx e \cdot \text{taille molécule}$
 $p \approx 10^{-13} \times 10^{-10} \approx 10^{-29} \text{ C.m.}$

et $E \approx E_{\text{créé par un cylindre infini portant une charge } Q}$
 (on aurait pu prendre un fil infini ou même une charge ponctuelle pour trouver l'ordre de grandeur).

Le théorème de Gauss conduit à $E = \frac{Q}{2\pi r \epsilon_0 h}$ avec un cylindre de hauteur h
 (on prendra $h \approx 20\text{cm}$ comme taille de bâton)

$\Rightarrow mg \approx \frac{p \cdot Q}{2\pi r^2 \epsilon_0 h}$ or $m = \frac{M}{N_A}$ avec $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

$$\text{Donc } Q \approx \frac{2\pi r^2 \epsilon_0 h M g}{\rho V_A} = \frac{2\pi \cdot (10^{-2})^2 \cdot 885 \cdot 10^{-12} \times 0,2 \times 18 \cdot 10^{-3} \cdot 981}{10^{-29} \times 6,02 \cdot 10^{23}}$$

$$Q \approx 3 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

soit environ $2 \cdot 10^8 e^-$, ce qui semble raisonnable, compte-tenu du nombre d'atomes dans le barreau, à qui des e^- ont pu être arrachés / ajoutés par frottement.

Méthode 2 : à partir de l'estimation de la force s'exerçant sur le barreau, de la part des molécules d'eau.

D'après la seconde loi de Newton : $\vec{F}_{\text{molécule d'eau} \rightarrow \text{barreau}} = -\vec{F}_{\text{barreau} \rightarrow \text{molécule d'eau}}$
de norme mg
d'après la méthode 1

$$\text{donc } \underbrace{F_{\text{molécule d'eau} \rightarrow \text{barreau}}}_{\approx Q E_{\text{dipôle}}} \approx mg$$

$$\approx Q E_{\text{dipôle}}$$

on suppose que toute la charge du barreau est placée au même point pour simplifier et que le champ créé par une molécule d'eau dans la direction de \vec{p} ($\theta=0$) vaut $\|\vec{E}_{\text{dipôle}}\| = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

$$Q \cdot \leftarrow \vec{p}$$

$$\Rightarrow Q \approx \frac{M g 2\pi \epsilon_0 r^3}{\rho V_A p}$$

Seul un facteur $r \leftrightarrow h$ diffère ici à cause de la modélisation plus grossière du barreau.

$$\Rightarrow Q \approx 2 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$