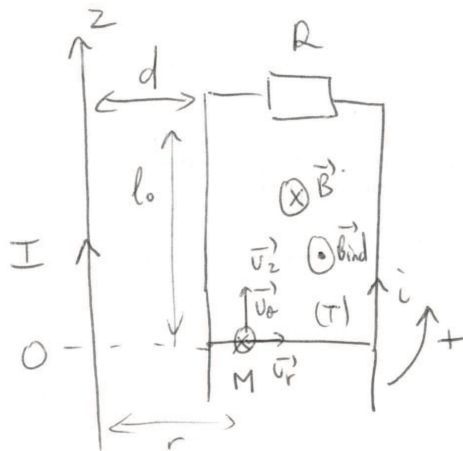


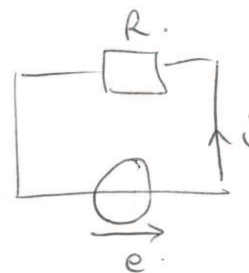
**Correction - DM n°8 - Induction**

**1 Rail de Laplace avec fil**



Rail de Laplace dans un champ non uniforme.

circuit elec  $\Leftrightarrow$ :



1)  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

Analyse qualitative: la barre chute  $\Rightarrow$  la taille du cadre augmente et le flux de  $\vec{B}$  selon  $\vec{u}_\theta$  augmente  $\Rightarrow$  d'après la loi de Lenz,  $\vec{B}_{ind}$  qui s'oppose à cette variation  $\Rightarrow \vec{B}_{ind} \parallel -\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow$  i dans le sens anti-horaire.

(cohérent car  $\vec{F}_{Laplace}$  s'oppose à la chute de la barre.)

Eq elec:  $e = Ri = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B}(r,z) \cdot d\vec{S}$

car  $z < 0$ .

flux orienté selon  $-\vec{u}_\theta$  d'après la règle de la main droite (convention).

$$e = -\frac{d}{dt} \left[ \int_{z=0}^{z=\dot{z}} \int_{r=d}^{r=d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot -dr \vec{u}_\theta \right] = +\frac{d}{dt} \left[ \frac{\mu_0 I l_0 \dot{z}}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \right]$$

$e = -\frac{\mu_0 I \dot{z}}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$  et  $\dot{z} < 0$  donc  $e > 0$   
 $= Ri$  (1) cohérent avec  $i > 0$ .

Eq méca :

$$m \ddot{z} = \vec{F}_L \cdot \vec{u}_z - mg$$

$$\vec{F}_L = \int_{r=d}^{d+a} i dr \vec{u}_r \wedge \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \right)$$

$$= \frac{i \mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d+a}{d} \right) \vec{u}_z \quad // \quad + \vec{u}_z \text{ cohérent.}$$

on notera que la force n'est pas uniforme : la barre pourrait tourner en tombant...  
→ on suppose qu'elle est maintenue horizontale.

$$m \ddot{z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d+a}{d} \right) i - mg \quad (2)$$

(1) dans (2) ⇒  $-\frac{m R}{\mu_0 I} \left( \frac{di}{dt} \right) \frac{2\pi}{\ln \left( \frac{d+a}{d} \right)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d+a}{d} \right) i - mg$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d+a}{d} \right) \right)^2 \frac{i}{mR} = \frac{g \mu_0 I}{R 2\pi} \ln \left( \frac{d+a}{d} \right)$$

$$\Rightarrow \left[ i = \frac{2\pi mg}{\mu_0 I \ln \left( \frac{d+a}{d} \right)} \left[ 1 - e^{-t/\tau} \right] \right] \text{ avec } \tau = mR \left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d+a}{d} \right) \right]^2$$

$$i > 0 \text{ et } i \xrightarrow{t \rightarrow \infty} i_{\text{lim}} = \frac{2\pi mg}{\mu_0 I \ln \left( \frac{d+a}{d} \right)}$$

$$i(t=0) = 0$$

$$v = \dot{z} = -Ri = -\frac{mgR}{\left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d+a}{d} \right) \right]^2} \left[ 1 - e^{-t/\tau} \right]$$

$$v < 0 \text{ et } v_{\text{lim}} = \frac{-mgR}{\left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d+a}{d} \right) \right]^2}$$

$$v(t=0) = 0$$

3) Bilan énergétique

$$(1) \Rightarrow \int x i dt \quad - \frac{\mu_0 I \dot{z}}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) i dt = Ri^2 dt.$$

$$(2) \times \dot{z} dt \Rightarrow - \frac{\mu_0 I \dot{z}}{2\pi} dt \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) i = -mg\dot{z} dt - m\ddot{z}\dot{z} dt.$$

$$\Rightarrow d \left[ \overset{E_c}{\frac{1}{2} m \dot{z}^2} \right] + d \left[ \overset{E_p}{mgz} \right] = - Ri^2 dt.$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = -Ri^2 = -P_{\text{Joule}}.$$

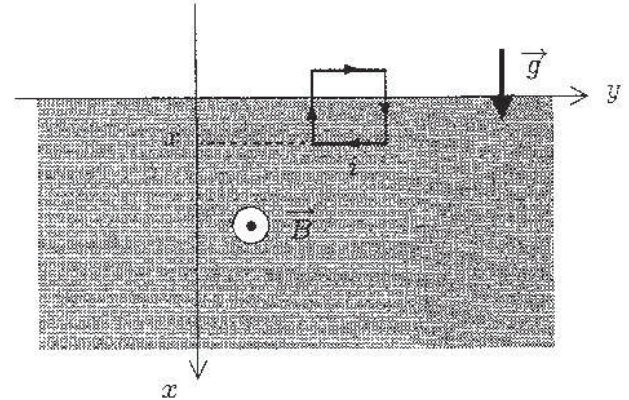
$E_m \downarrow$  et est dissipée par effet Joule.

## 2 Freinage d'une spire par induction

1. Quand la spire pénètre dans la zone de champ magnétique, le flux magnétique à travers elle varie, elle est donc parcourue par un courant induit et se trouve soumise à des forces de Laplace. Le courant induit s'oppose à l'augmentation de flux magnétique, il est donc orienté dans le sens horaire. Les forces de Laplace vont freiner la chute libre de la spire. Dès que la spire est entièrement dans la zone de champ magnétique, le flux magnétique à travers elle ne varie plus, la chute libre reprend.

Commençons par **orienter** le circuit. Puisque l'analyse physique nous a permis de déterminer le sens réel du courant induit, nous choisissons ce sens-là (voir figure ci-contre).

Les forces de Laplace sur les côtés verticaux de la spire s'annulent. Il ne reste que la force sur le côté du bas, qui est verticale. Toutes les forces appliquées à la spire sont verticales, la vitesse initiale aussi, le mouvement ultérieur de la spire reste donc une translation selon l'axe  $Ox$ .



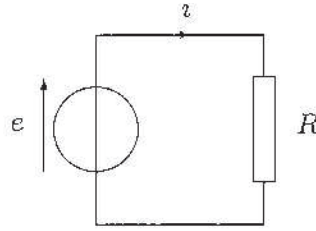
2. La spire est soumise à son poids et aux forces de Laplace. La résultante des forces de Laplace sur la spire est :  $\vec{F}_{\text{Lap}} = -i(t)aB_0\vec{u}_x$ . Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la spire et projeté sur l'axe  $Ox$  donne l'équation mécanique :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - aB_0i(t).$$

Pour déterminer la force électromotrice induite dans la spire, on utilise la loi de Faraday :

loi de Faraday :  $e = -\frac{d\Phi_B}{dt}$  où le flux de  $\vec{B}$  est calculé à travers la surface orientée par le sens du courant  $i$ . La surface est orientée selon  $-\vec{u}_z$  d'où  $\Phi_B(t) = -ax(t)B_0$  et  $e = av(t)B_0$ .

Le circuit électrique équivalent est donc :



L'équation électrique s'écrit  $e(t) = Ri(t)$ , donc  $i(t) = \frac{aB_0}{R}v(t)$ .

En éliminant  $i(t)$  entre l'équation électrique et l'équation mécanique, nous obtenons l'équation vérifiée par  $v(t)$  :  $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$ , où  $\tau = \frac{mR}{(aB_0)^2}$  et  $v_\infty = \frac{mgR}{(aB_0)^2}$ . La solution de cette équation, compte tenu de  $v(0) = v_0$  est :

$$v(t) = (v_0 - v_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_\infty.$$

À partir de l'instant  $t_1$  tel que  $x(t_1) = a$ , le mouvement continue par une phase de chute libre avec une vitesse initiale inférieure à  $v_0$ .

3. Si la résistance de la spire est nulle, nous ne pouvons plus négliger le phénomène d'auto-induction. La force électromotrice totale induite dans la spire est donc  $e(t) = aB_0v(t) - L\frac{di}{dt}$ . L'équation électrique du circuit est alors  $e(t) = 0$ . En dérivant l'équation mécanique par rapport au temps et en remplaçant  $\frac{di}{dt}$  par l'expression ci-dessus, nous obtenons l'équation différentielle vérifiée par  $v(t)$  :  $\frac{d^2v}{dt^2} + \omega^2v(t) = 0$  où  $\omega^2 = \frac{(aB_0)^2}{mL}$ . La solution est, compte tenu de  $v(0) = v_0$  et de  $\frac{dv}{dt}(0) = g$  :  $v(t) = v_0 \cos \omega t + \frac{g}{\omega} \sin \omega t$ . En intégrant cette équation, avec  $x(0) = 0$ , nous obtenons la position instantanée de la spire :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

Le mouvement de la spire sera oscillatoire si la spire ne pénètre pas entièrement dans la zone de champ magnétique donc si :

$$\frac{g}{\omega^2} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2} < a.$$

On voit que la condition précédente est restrictive sur la valeur de la vitesse, ce qui est tout à fait cohérent.

Remarque : Soit

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \omega t \cos \varphi - A \sin \omega t \sin \varphi$$

donc par identification,  $a = A \cos \varphi$  et  $b = -A \sin \varphi$ , et l'amplitude est donnée par

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ce qui permet de montrer l'inégalité ci-dessus.