

**MP2 - DS n°3bis (CCS - Mines)**  
(Samedi 9 novembre 2024 - Durée 4h)

*L'utilisation des calculatrices est autorisée. Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée. La précision, la clarté ainsi que les efforts de présentation (résultats encadrés ou soulignés) seront pris en compte dans la note. Les efforts d'explication (schémas) seront valorisés.*

## 1 MÉCANIQUE DU TRANSPORT FERROVIAIRE

La première locomotive à vapeur date de 1804, elle a été conçue par un ingénieur des mines anglais Richard Trevithick, comme une application de la machine à vapeur. Depuis, le transport ferroviaire a connu une évolution rapide ; il apparaît aujourd'hui comme une solution écologique au désir et au besoin de mobilité d'une population mondiale qui ne cesse de croître.



**Figure 1** Gauche : La locomotive de Trevithick. Droite : train fonctionnant avec une pile à hydrogène

Seule la partie II sera traitée ici.

### *Données pour la partie II*

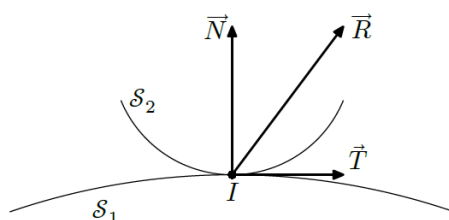
Accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Coefficient d'adhérence fonte-acier	$f_a = 0,12$
Latitudes des villes citées	Lyon = $45,8^\circ$ Nord ; Paris = $48,9^\circ$ Nord

### Lois de Coulomb du frottement solide, coefficient d'adhérence

Soient deux solides  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  en mouvement par rapport au référentiel d'étude  $\mathcal{R}_0$ , en contact au point  $I$ . Sans glissement,  $v_{I \in \mathcal{S}_1 / \mathcal{R}_0} = v_{I \in \mathcal{S}_2 / \mathcal{R}_0}$ , il y a adhérence. La force  $\vec{R}$  qu'exerce  $\mathcal{S}_1$  sur  $\mathcal{S}_2$  a une composante normale  $\vec{N}$  et une composante tangentielle  $\vec{T}$  ( $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ ) telles que

$$\|\vec{T}\| < f_a \|\vec{N}\|$$

où  $f_a$  est le coefficient d'adhérence entre les deux solides.



**Figure 12** Frottement entre deux solides dans le cas d'un contact ponctuel adhérent

### II.A – Démarrage du train de Trevithick

Le premier train qui sera étudié est celui de Trevithick. L'idée de Trevithick a été d'associer la roue pour le transport, à la machine à vapeur pour la force motrice. Au cours d'un essai, la locomotive de Trevithick de masse  $M_\ell = 1 \text{ t}$ , dont la figure 1 montre une reproduction, a été capable de tracter un ensemble de dix wagons portant un chargement d'acier de masse totale  $M_c = 10 \text{ t}$  sur une distance  $D = 15 \text{ km}$ . Lors de cet essai en ligne droite, conduit sur des rails en fonte horizontaux parallèles à l'axe  $Ox$ , le train parvint à atteindre la vitesse  $v_0 = 8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , supposée constante après la phase de démarrage.

On étudie ici la phase de démarrage de la locomotive tractant les dix wagons. L'étude est conduite dans le référentiel terrestre supposée galiléen. On envisage un démarrage à accélération constante, et on note  $\vec{a}_0$  cette accélération. On définit deux systèmes :

- le système  $\Sigma_1$ , de masse totale  $M_c$ , est constitué de l'ensemble des 10 wagons et de leur charge.
- le système  $\Sigma_2$  correspond à la locomotive de Trevithick, de masse totale  $M_\ell$ , et qui compte également quatre roues en acier.

On note  $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$  la force qu'exerce  $\Sigma_2$  sur  $\Sigma_1$  ; cette force est supposée horizontale.

On adopte un modèle très simpliste de contact ponctuel entre les roues et les rails et on suppose qu'aucune roue ne glisse sur les rails. On donne pour le contact acier-fonte le coefficient d'adhérence (également appelé coefficient de frottement statique)  $f_a$ . Les lois de Coulomb du frottement solide sont rappelées en annexe.

On admet qu'une étude dynamique permet d'établir, qu'en considérant les roue de masse négligeable, la force  $\vec{F}_{r/1}$  exercée par les rails sur une roue du système  $\Sigma_1$  est normale au rail. Par la suite, on fera cette approximation pour toutes les roues du système  $\Sigma_1$ . On note également  $\vec{F}_{r/2}$  la force qu'exerce le rail sur une des quatre roues de la locomotive, avec  $\vec{F}_{r/2} = \vec{N}_{r/2} + \vec{T}_{r/2}$ , où  $\vec{N}_{r/2}$  et  $\vec{T}_{r/2}$  désignent respectivement les composantes normale et tangentielle de l'action d'un rail sur une roue de la locomotive.

**Q 19.** Faire un schéma de la situation et représenter les forces qui s'exercent sur  $\Sigma_1$ . Exprimer la force  $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$  en fonction, entre autres, de l'accélération  $\vec{a}_0$ .

**Q 20.** Faire un autre schéma où figurent les forces qui s'exercent sur  $\Sigma_2$ . On négligera toute force de frottement fluide due à l'air.

**Q 21.** Montrer que  $\vec{T}_{r/2}$  est nécessairement non nulle. On admettra que cette force est identique sur les quatre roues de la locomotive. Exprimer  $\vec{T}_{r/2}$  en fonction notamment de l'accélération  $\vec{a}_0$  et des diverses masses introduites dans l'énoncé.

**Q 22.** Calculer le temps qu'a mis le train de Trevithick à atteindre sa vitesse de croisière, en supposant que  $\|\vec{T}_{r/2}\| = 0,1 f_a \|\vec{N}_{r/2}\|$ , de sorte que l'absence de glissement est assurée.

### II.B – Circulation des trains à grande vitesse (TGV)

On s'intéresse maintenant aux voies des trains à grande vitesse, dont le tracé est déterminé par diverses contraintes. Une des contraintes essentielles est que le trajet doit être le plus horizontal possible. La morphologie des territoires traversés impose de ce fait des tracés courbes pour les trajets des trains.

#### II.B.1) Passage en courbe

On envisage ici le problème de la jonction entre deux tronçons rectilignes  $A_0A$  et  $BB_0$  formant un angle de  $120^\circ$  (figure 4). On considère pour simplifier que le tracé de la voie entre les points  $A$  et  $B$  suit une portion du cercle  $\mathcal{C}$  tangent aux deux segments de droites en  $A$  et  $B$ . On note  $d_{AB}$  la distance en ligne droite entre ces deux points. Le référentiel terrestre est toujours supposé galiléen.

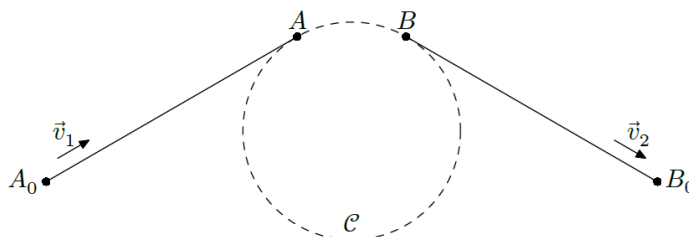


Figure 4 Raccordement circulaire entre deux tronçons rectilignes

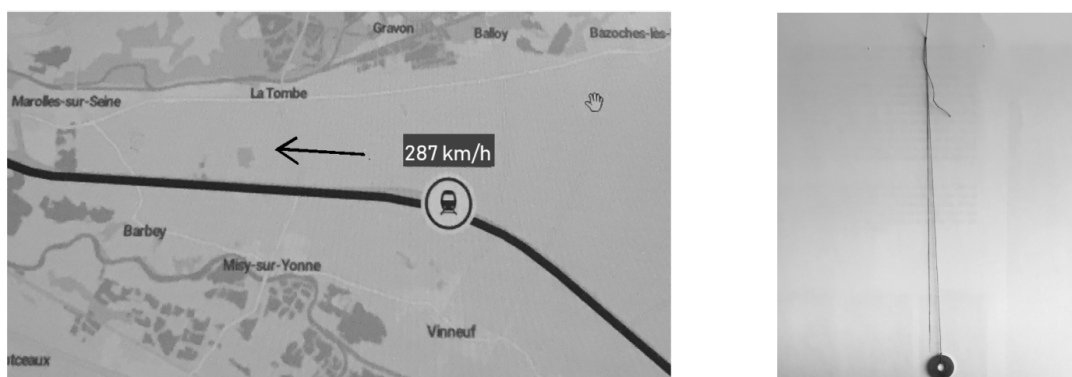
**Q 23.** Déterminer le rayon  $R_c$  du cercle  $\mathcal{C}$  en fonction des données.

**Q 24.** En supposant la vitesse du train constante en norme, de valeur notée  $V_0$  (soit  $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = V_0$ ), tracer l'évolution de la norme de l'accélération du train, assimilé à un point matériel, entre l'instant  $t = 0$  où il se trouve en  $A_0$  et l'instant  $t_f$  où il se trouve en  $B_0$ .

**Q 25.** Calculer la valeur numérique de l'accélération  $a_c$  entre les points  $A$  et  $B$  dans le cas où  $d_{AB} = 2$  km et  $V_0 = 300$  km  $\cdot$  h $^{-1}$ .

Au niveau d'un tel virage, la voie présente un dévers, c'est-à-dire une différence de hauteur entre les rails intérieur et extérieur qui permet d'incliner le train. Ce dévers est conçu de sorte qu'un passager ne soit pas trop fortement déporté sur le bord de son siège au cours du virage. L'écartement entre les deux rails au niveau des roues est quant à lui fixé à  $E_r = 1400$  mm.

Lors d'un voyage en TGV, un passager curieux d'étudier ce dévers a placé un pendule simple, constitué d'une masse  $m_p$  reliée à un fil inextensible, au dos du siège situé devant lui, vers l'avant du train. Ainsi fixé, ce pendule peut se déplacer librement dans un plan vertical perpendiculaire à la vitesse du train. La figure 5 montre la position d'équilibre du pendule dans le virage indiqué sur la carte, alors que le train roule à 287 km  $\cdot$  h $^{-1}$ .



**Figure 5** La carte permet d'estimer que le rayon de courbure du virage lors de la réalisation de l'expérience est  $R_c = 4$  km. Sur la photo à droite, le segment noir matérialise la verticale lorsque le train est à l'horizontale.

**Q 26.** Estimer la valeur du dévers lors de la réalisation de cette expérience. Préciser à l'aide d'un schéma clair lequel des deux rails, intérieur ou extérieur au virage, est surélevé.

### II.B.2) Usure abrasive des rails sur la ligne de TGV Paris-Lyon

Pour cette sous-partie, et pour celle-ci seulement, on considère que le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_t$  est non galiléen et que le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$  est galiléen.

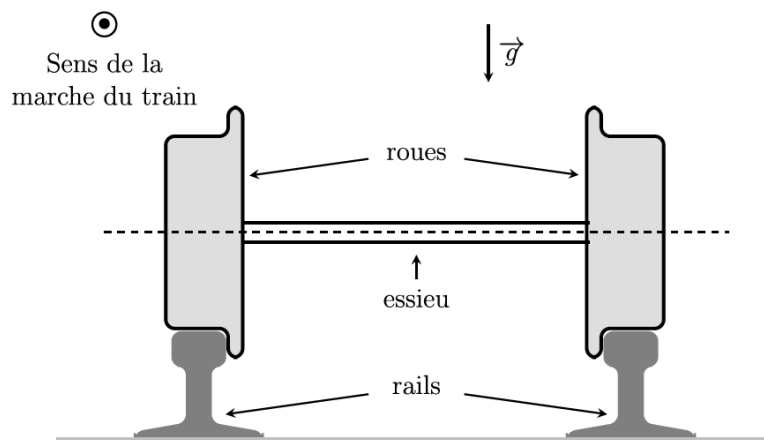
**Q 27.** Décrire le mouvement du référentiel terrestre  $\mathcal{R}_t$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_g$ .

On considère la ligne de TGV Paris-Lyon, dont la longueur est approximativement de 500 km, et sur laquelle les trains (figure 6) roulent à la vitesse  $V_0 = 300$  km  $\cdot$  h $^{-1}$  par rapport au référentiel terrestre. La ligne est composée de deux voies : une servant pour le trajet de Paris vers Lyon, l'autre pour le trajet Lyon vers Paris.



**Figure 6** Un train de dernière génération circulant sur la ligne Paris-Lyon.

On étudie par la suite un TGV allant de Paris à Lyon, sur un tronçon rectiligne horizontal, localement confondu avec une ligne méridienne nord-sud. La figure 7 schématise le contact entre les rails et les roues de ce train.



**Figure 7** Schéma – en coupe – du contact entre les rails et les roues du TGV (les échelles de distance ne sont pas respectées).

**Q 28.** La prise en compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre implique l'existence d'une force normale horizontale exercée par l'intérieur d'un des deux rails sur les roues avec lesquelles il est en contact. Identifier, en le justifiant, le rail concerné dans le cas d'un TGV circulant de Paris vers Lyon. Sur un schéma inspiré de celui de la figure 7 faire figurer les forces de contact exercées par les rails sur les roues.

De nos jours, les rails sont réalisés en acier trempé très dur, afin d'en limiter l'usure. Il existe différents types d'usure des rails ; nous n'envisagerons ici que l'usure abrasive, qui a lieu à l'interface entre les roues et le rail. On note que, lorsqu'on étudie l'usure, on prend en compte le fait que le contact roue-rail n'est pas ponctuel : cela implique qu'il y a nécessairement une zone de contact glissant, même en cas d'adhérence. Diverses lois permettent de quantifier cette usure ; nous nous limiterons à la loi d'usure de Preston-Archard selon laquelle le volume de matière usée peut être calculé par la formule

$$V = k \frac{F_n}{H} d$$

où  $H$  est la dureté du matériau dont l'unité est  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $d$  la distance sur laquelle a eu lieu le glissement,  $F_n$  la force normale au glissement et  $k$  un coefficient, appelé coefficient d'Archard, qui dépend des conditions expérimentales, matériaux, température, géométrie, etc.

**Q 29.** Discuter qualitativement la loi de Preston-Archard.

**Q 30.** Déterminer la dimension du coefficient d'Archard  $k$ .

**Q 31.** Pour le rail identifié dans la question Q 28, comparer le degré d'usure des faces supérieure et intérieure du rail. Préciser les approximations réalisées.



## 2 STRUCTURE INTERNE DE LA TERRE

On considère que l'intérieur de la Terre est constitué d'une succession de couches de propriétés physiques différentes, telles que représentées à la figure 1 :

- au centre, le noyau forme 17 % du volume terrestre et se divise en :
  - la graine (ou le noyau interne), essentiellement constitué de fer solide,
  - le noyau externe, essentiellement constitué de fer liquide ;
- dans la partie intermédiaire, le manteau constitue 81 % du volume terrestre ;
- en surface, la croûte solide représente moins de 2 % du volume terrestre.

Le problème aborde divers phénomènes et modèles en relation avec cette structure.

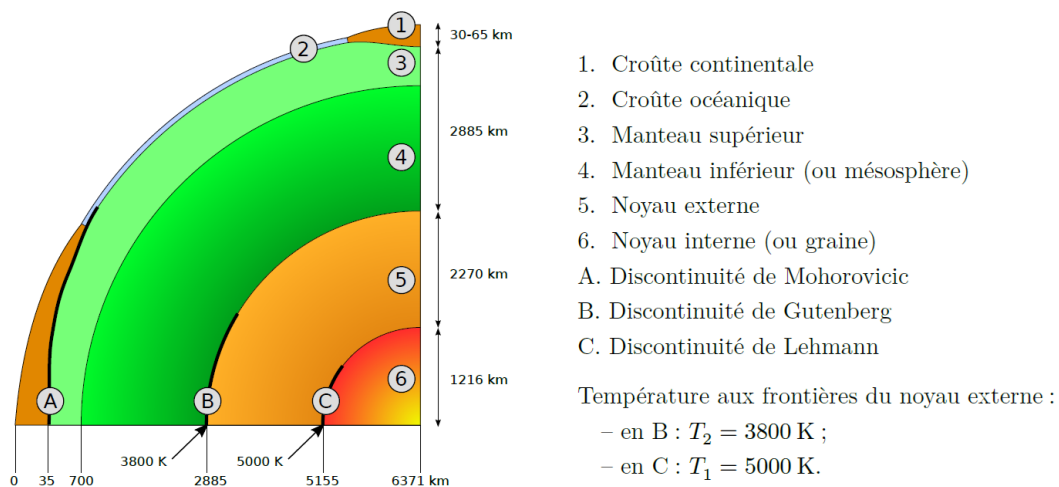


Figure 1 Structure de la Terre. D'après Wikipédia.

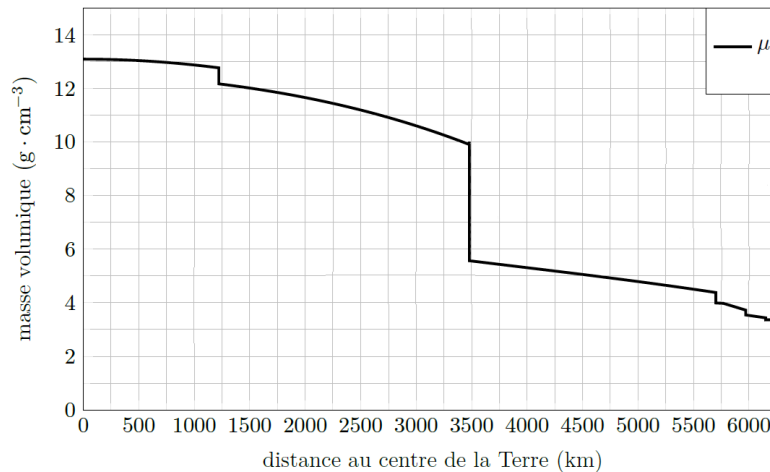


Figure 3 Profils de la masse volumique dans le modèle PREM.  
 D'après Dziewonski A. M., Anderson D. L., 1981. *Preliminary reference Earth*

Données

Rayon de la Terre	$R_T = 6371 \text{ km}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$

La divergence en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Seule la partie II sera abordée ici.

## II Étude d'un modèle gravimétrique de la Terre

### II.A – Préliminaire : l'analogie électrostatique-gravitation

**Q 16.** En utilisant l'analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel, montrer que ce dernier, noté  $\vec{\mathcal{G}}$ , vérifie le théorème de Gauss de la gravitation (analogue du théorème de Gauss de l'électromagnétisme).

### II.B – Un premier modèle gravimétrique fruste de la Terre

Dans ce premier modèle, on assimile la Terre à une boule  $T_h$  de centre  $O$ , de rayon  $R_T$  et de masse  $M_T$  uniformément répartie en volume. Celle-ci est à l'origine d'un champ gravitationnel noté  $\vec{\mathcal{G}}_{T_h}$ . On note  $\mu_0$  la masse volumique moyenne de la Terre (qui s'identifie ici à la masse volumique en chacun de ses points).

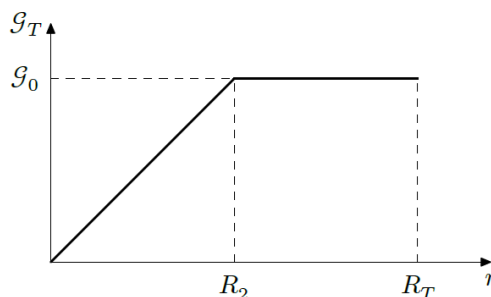
**Q 17.** Déterminer le champ gravitationnel  $\vec{\mathcal{G}}_{T_h}$  en tout point de l'espace en introduisant un système de coordonnées adapté.

**Q 18.** Tracer sa norme en fonction de la distance  $r$  au centre  $O$ .

**Q 19.** Calculer sa valeur  $\mathcal{G}_0$  à la surface de la Terre.

### II.C – Un second modèle gravimétrique (noyau + manteau) de la Terre

Le modèle précédent est fruste puisqu'il ne tient pas assez compte de la structure interne de la Terre. On rencontre dans la littérature un second modèle, où la Terre est toujours assimilée à une boule de centre  $O$  et de rayon  $R_T$  avec une répartition de masse à symétrie sphérique de centre  $O$ ; mais cette répartition est cette fois-ci inhomogène de sorte que la norme  $\mathcal{G}_T$  du champ gravitationnel interne en fonction de la distance  $r$  au centre  $O$  présente l'allure précisée à la figure 4.



**Figure 4** Champ de gravitation terrestre à l'intérieur de la Terre pour un modèle (noyau + manteau).

On distingue deux parties dans ce modèle (noyau + manteau) : la discontinuité de Gutenberg définie à la figure 1 correspond à la distance  $r = R_2$ .

On note toujours  $\mu_0$  la masse volumique moyenne de la Terre.

**Q 20.** Justifier que la valeur de  $\mathcal{G}_0$  à la surface de la Terre dans le cadre de ce modèle est inchangée par rapport à celle évaluée à la question Q 19.

**Q 21.** Déterminer la distribution de masse volumique  $\mu(r)$  pour la Terre dans ce modèle. L'exprimer en fonction de  $R_T$ ,  $R_2$  et  $\mu_0$  dans le noyau et en fonction de  $R_T$ ,  $M_T$  et  $r$  dans le manteau.

**Q 22.** Tracer l'allure de cette distribution de masse volumique  $\mu(r)$  en précisant les valeurs numériques remarquables. Discuter les similitudes et les différences de ce modèle avec le profil de masse volumique donné par le modèle PREM sur la figure 3.

### 3 Étude d'un microphone électrostatique

Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données.

On s'intéresse ici à quelques aspects de la transduction électro-acoustique. Une large partie du problème est consacrée à la transduction électrodynamique. Un modèle simple de haut-parleur électrostatique est ensuite étudié.

**Seule la quatrième partie, portant sur le microphone électrostatique sera étudiée dans ce DS.**

Deux disques conducteurs de même rayon, parallèles, sont écartés d'une faible distance  $e$ . L'un d'eux est fixe (« la base »), l'autre constituant la membrane est mobile en translation selon l'axe  $Oz$ .

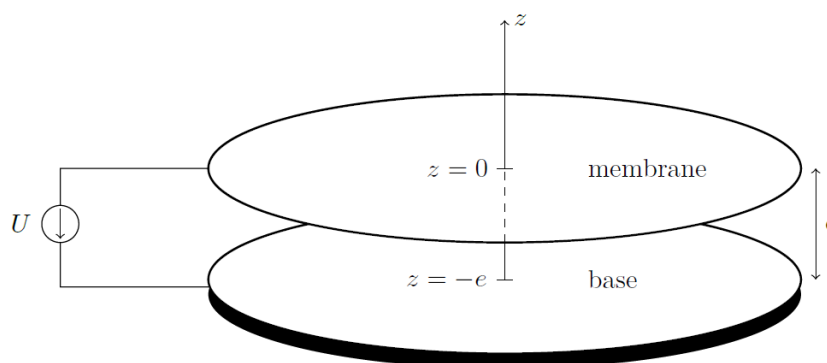


Figure 3

La membrane de surface  $S$  est rappelée vers la position  $z = 0$  par la force de rappel élastique  $-kz\vec{u}_z$ . Elle est également soumise, lors de ses déplacements, à la force de frottement fluide  $-h\frac{dz}{dt}\vec{u}_z$ . L'air séparant les disques est assimilable, du point de vue électrostatique, au vide. Lorsqu'on établit une différence de potentiel (ddp)  $U$  entre les disques, il apparaît une charge électrique  $Q$  sur la base et une charge opposée  $-Q$  sur la membrane. Ces charges sont réparties uniformément sur chaque disque.

#### IV.A – Force exercée sur la membrane

La base est assimilée à un plan infini portant la densité surfacique de charge  $\sigma$  uniforme.

**IV.A.1)** En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge, préciser, en les justifiant, la direction du champ  $\vec{E}$  créé par la base seule et sa dépendance avec les coordonnées spatiales.

**IV.A.2)** Comparer les champs  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{E}(M')$  créés par la base seule en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport au plan des charges.

**IV.A.3)** En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe  $Oz$  traversant le plan de charge, déterminer le champ  $\vec{E}$  créé par la base seule dans tout l'espace en fonction de  $\sigma$  puis de la charge  $Q$ , sachant que l'armature a une surface réelle  $S$ .

**IV.A.4)** En déduire la force électrostatique  $\vec{F}_e$  subie par la membrane. Est-elle attractive ou répulsive ?

**I.A.5)** L'ensemble des deux conducteurs constitue un condensateur de capacité  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e + z}$ .

Exprimer  $\vec{F}_e$  en fonction de  $U$ ,  $z$  et des constantes du problème.

Lorsque le condensateur est soumis à une tension constante  $U_0$ , la membrane adopte une position d'équilibre sous l'action conjointe de la force électrique  $\vec{F}_e$ , de la force de rappel élas-

tique et de son poids (l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  étant supposée verticale descendante). Dans cette position d'équilibre, l'abscisse de la membrane est  $z_0$ .

L'étude de cette position d'équilibre, supposée stable, ne sera pas abordée dans ce sujet. Pour les applications numériques des questions suivantes, on prendra les données suivantes :

$$e = 3,0 \text{ mm}; \quad S = 0,05 \text{ m}^2; \quad k = 1000 \text{ N.m}^{-1};$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}; \quad U_0 = 1,1 \cdot 10^3 \text{ V} \quad \text{et} \quad z_0 = -e/100$$

#### IV.C – Étude dynamique

**IV.C.1)** Donner l'équation différentielle reliant  $z(t)$  à la tension  $U(t)$  en régime variable. On notera  $m$  la masse de la membrane.

**IV.C.2)**  $U(t)$  étant une tension oscillante autour de la valeur  $U_0$  précédente, de la forme  $U(t) = U_0 + u(t)$  avec  $|u(t)| \ll U_0$ , on étudie les petits mouvements de la membrane au voisinage de la position d'équilibre stable  $z_0$  et on pose  $z(t) = z_0 + \xi(t)$  avec  $|\xi(t)| \ll e + z_0$ . Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $\xi(t)$ .

**IV.C.3)** Montrer qu'avec les hypothèses, cette équation prend la forme simplifiée

$$m \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2} + h \frac{d\xi(t)}{dt} + k' \xi(t) = \alpha u(t)$$

On fera un développement limité au premier ordre en  $\frac{\xi}{e + z_0}$  et  $\frac{u}{U_0}$ .

Donner les expressions de  $k'$  et  $\alpha$  en fonction de  $k$ ,  $S$ ,  $U_0$ ,  $e$  et  $z_0$ .

Donner les valeurs numériques de  $k'$  et  $\alpha$  (en reprenant les données de la question IV.B.5).

Conclure.

#### IV.D – Régime sinusoïdal forcé

On prend  $u(t) = u_s \cos(\omega t)$ . On note  $\underline{u}(t)$  et  $\underline{\xi}(t)$  les représentations complexes de  $u(t)$  et  $\xi(t)$ .

**IV.D.1)** Quelle est la nature du transfert  $A(j\omega) = \underline{\xi}/\underline{u}$  ?

**IV.D.2)** La membrane est une feuille d'aluminium d'épaisseur  $a = 20 \text{ } \mu\text{m}$ , d'aire  $S = 0,05 \text{ m}^2$  et de masse volumique  $\mu = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Calculer la fréquence propre  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k'}{m}}$  du système.

**IV.D.3)** On se place à une fréquence  $f \ll f_0$  (en « contrôle de raideur »). Quelle amplitude  $u_s$  doit-on donner à  $u(t)$  pour obtenir une amplitude d'oscillation  $\xi_m = e/100$  ?

Conclure.