

CORRIGÉ du DS n°3 (CCP-e3a)

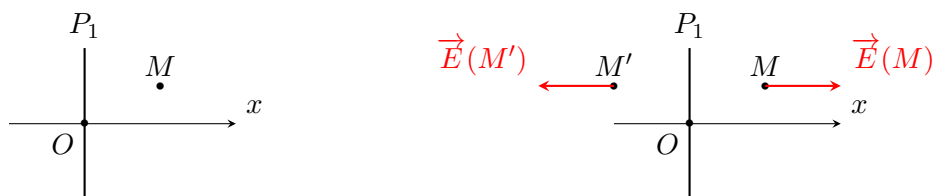
1 Étude d'un condensateur

ÉTUDE D'UN MICROPHONE ÉLECTROSTATIQUE. D'après Centrale TSI

I. Capacité du condensateur au repos

- 1) Étant donné un point M quelconque de coordonnées (x, y, z) , les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ sont deux plans de symétrie des charges contenant M . On en déduit que : $\vec{E}_1(M) = E_1(x, y, z) \vec{u}_x$. De plus, il y a invariance par toute translation le long de Oy et de Oz ce qui entraîne que E_1 ne dépend ni de y , ni de z . On a donc :

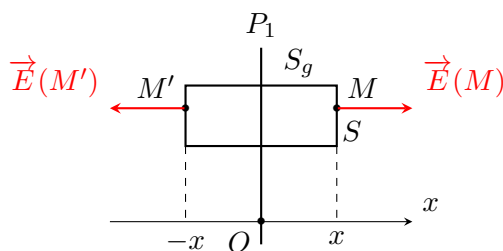
$$\vec{E}_1(M) = E_1(x) \vec{u}_x$$



- 2) Le plan de $P_1 = (Oyz)$ est un plan de symétrie des charges électriques : de part et d'autre de ce plan, le champ électrique est transformé en son symétrique. Nous avons donc :

$$\vec{E}_1(M') = \text{sym}_{Oyz} \vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M)$$

- 3) On prend une surface de Gauss (surface fermée) S_g en forme de cylindre de génératrices // à Ox , de surface de base S et placé symétriquement par rapport au plan de P_1 . Un point M de coordonnée $x > 0$ est supposé être situé sur la base supérieure du cylindre.



Le théorème de Gauss donne :

$$\iint_{S_g} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Base sup}} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S}_M + \iint_{\text{Base inf}} \vec{E}_1(M') \cdot d\vec{S}_{M'} + \iint_{\text{Surf lat}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_{\text{lat}}$$

L'intégrale sur la surface latérale du cylindre est nulle et les deux premières intégrales sont égales. Il vient alors :

$$\iint_{S_g} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = 2 \iint_{\text{Base sup}} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S}_M = 2 E_1(x) S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

et donc $E_1(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ si $x > 0$. Dans le cas où $x < 0$, on utilise la propriété de symétrie de \vec{E}_1 de part et d'autre du plan de symétrie P_1 . En résumé :

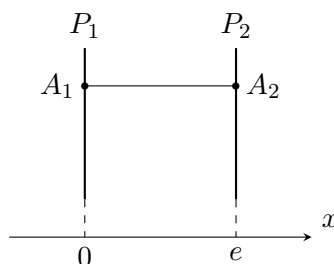
$$\vec{E}_1(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4) On peut dresser le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
\vec{E}_1	$-\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	
\vec{E}_2	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$-\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	
\vec{E}	$\vec{0}$	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\vec{0}$	

On a donc : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$ entre les deux plaques P_1 et P_2 et $\vec{E}(M) = \vec{0}$ partout ailleurs.

5) Appliquons le théorème de la circulation entre les deux plaques, le long d'un chemin rectiligne allant d'un point A_1 de P_1 vers un point A_2 de P_2 .



On obtient :

$$u_c = V_{P_1} - V_{P_2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^e \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e = \frac{qe}{S\varepsilon_0}$$

d'où l'expression :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

II. Introduction d'une plaque métallique entre les deux armatures du condensateur

1) Initialement, les électrons de conduction de \mathcal{P} se déplacent sous l'influence du champ électrique $\vec{E} = \sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$ créé par le condensateur. Comme $\vec{F}_{el} = -e\vec{E}$, les électrons s'accumulent sur la face A et il y a un défaut d'électron sur la face B . On a donc :

$$\sigma_A < 0 \quad \text{et} \quad \sigma_B > 0$$

Comme la plaque est initialement non chargée, on a :

$$\sigma_A = -\sigma_B$$

- 2) Le champ électrique total \vec{E}_{tot} créé par l'ensemble $\{P_1 + P_2 + A + B\}$ est la superposition du champ \vec{E} créé par $\{P_1 + P_2\}$ qui a déjà été calculé à la question **1.3**) et des champs électriques \vec{E}_A et \vec{E}_B créés par les faces A et B . En ordonnant les résultats dans un tableau, nous avons :

x	0	x_0	$x_0 + d$	e
\vec{E}	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$
\vec{E}_A	$-\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$
\vec{E}_B	$-\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$-\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$

Pour $x_0 \leq x \leq x_0 + d$, le champ électrique total s'écrit :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x - \frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0} \vec{u}_x = \vec{0}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\sigma_A = -\sigma \quad \text{et} \quad \sigma_B = \sigma}$$

- 3) D'après le tableau étudié à la question précédente, nous avons :

$$\boxed{\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ pour } x \in [0, x_0] \text{ et } x \in [x_0, x_0 + d]}$$

ce qui signifie que dans ces deux régions les champs électriques créés par A et B se compensent.

Comme le champ électrique est nul dans le domaine $x \in [x_0, x_0 + d]$, le potentiel y est constant et $V(x_0) = V(x_0 + d)$. On en déduit que :

$$u_c = V(x=0) - V(x=e) = \{V(0) - V(x_0)\} + \{V(x_0+d) - V(e)\} = \frac{\sigma x_0}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma(e - x_0 - d)}{\varepsilon_0}$$

et donc :

$$\boxed{u_c = \frac{\sigma(e-d)}{\varepsilon_0}}$$

- 4) En posant $\sigma = q/S$, il vient :

$$u_c = \frac{q(e-d)}{S\varepsilon_0} = \frac{q}{C'}$$

et donc :

$$\boxed{C' = \frac{\varepsilon_0 S}{e-d} > \frac{\varepsilon_0 S}{e} = C_0}$$

La plaque métallique permet donc d'augmenter la capacité du condensateur.

III. Réponse du circuit électrique en régime permanent sinusoïdal. D'après Centrale TSI

- 1) Durant le passage de l'onde acoustique, l'écartement entre les deux armatures du condensateur devient $e + x_1(t)$ et la capacité s'écrit :

$$C(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{e + x_1(t)} = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \frac{1}{1 + x_1/e} \approx \frac{\varepsilon_0 S}{e} \left(1 - \frac{x_1(t)}{e}\right) = C_0 - C_0 \frac{X_1}{e} \cos(\omega t)$$

et donc :

$$\boxed{C_1 = C_0 \frac{X_1}{e}}$$

2) a) On a :

$$i = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C(t) \frac{du_c}{dt} + u_c \frac{dC}{dt}$$

b) Il vient donc :

$$u = Ri = RC \frac{du_c}{dt} + u_c R \frac{dC}{dt}$$

Or $u_c = U_0 - u$, ce qui entraîne :

$$u = -RC \frac{du}{dt} + (U_0 - u) R \frac{dC}{dt}$$

d'où :

$$RC \frac{du}{dt} + \left(1 + R \frac{dC}{dt}\right) u = RU_0 \frac{dC}{dt}$$

3) En notant que $R \frac{dC}{dt} = RC_0 \omega \frac{X_1}{e} \sin(\omega t)$, on peut supposer que, lorsque $X_1/e \ll 1$:

$$\left| R \frac{dC}{dt} \right| \ll 1 \quad \text{et} \quad C \approx C_0$$

On a donc :

$$RC_0 \frac{du}{dt} + u = RC_0 \omega U_0 \frac{X_1}{e} \sin(\omega t)$$

En divisant par C_0 , on obtient :

$$\frac{du}{dt} + \omega_0 u = \omega U_0 \frac{X_1}{e} \sin(\omega t) = \omega U_0 \frac{X_1}{e} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

et on obtient bien le résultat demandé par l'énoncé.

$$\frac{du}{dt} + \omega_0 u = \omega A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{avec} \quad A = \frac{U_0 X_1}{e} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC_0}$$

4) Dans le domaine complexe : $\underline{u}(t) = U \exp(j\omega t) \exp(j\varphi_u)$, ce qui conduit à :

$$(j\omega + \omega_0) \underline{u}(t) = -j\omega U_0 \frac{X_1}{e} e^{j\omega t} \implies \underline{u}(t) = \frac{-j\omega}{(j\omega + \omega_0)} U_0 \frac{X_1}{e} e^{j\omega t}$$

d'où :

$$U = |\underline{u}| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} U_0 \frac{X_1}{e}$$

5) On étudie les asymptotes basse et haute fréquence :

- Si $\omega \ll \omega_0$, $U \approx U_0 \frac{X_1}{e} \frac{\omega}{\omega_0}$ donc $20 \log U = 20 \log \left(U_0 \frac{X_1}{e} \right) + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$. C'est une droite de pente +20 dB/décade.
- Si $\omega \gg \omega_0$, $U \approx U_0 \frac{X_1}{e}$ donc $20 \log U = 20 \log \left(U_0 \frac{X_1}{e} \right)$.

L'allure du graphe reproduit ces deux comportements asymptotiques. On remarque qu'il y a une asymptote basse fréquence qui varie de -8 dB à 30 Hz jusqu'à 0 dB à 70 Hz. On peut calculer sa pente :

$$p = \frac{0 + 8}{\log 70 - \log 30} \approx 22 \text{ dB/décade}$$

ce qui confirme le modèle théorique.

- 6) Les deux asymptotes se coupent en $\omega_0 = 2\pi f_0$. On lit sur le graphique $f_0 = 70$ Hz et donc :

$$C_0 = \frac{1}{2\pi f_0 R} = 2,3 \times 10^{-7} \text{ F}$$

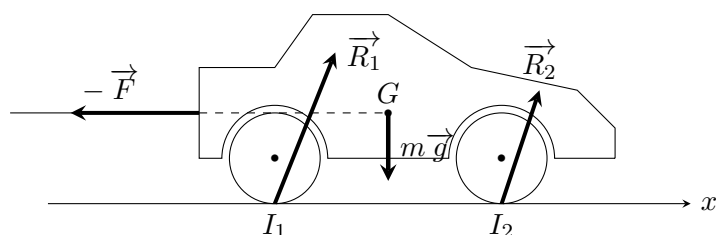
- 7) On peut supposer qu'il y a une résonance mécanique à la fréquence $f_R = 2.10^4$ Hz, pour la pulsation caractéristique $\omega_R = \sqrt{k_e/m_e}$, ce qui donne :

$$\sqrt{k_e/m_e} = 2\pi f_R = 1,3.10^5 \text{ rad.s}^{-1}$$

2 À propos de mécanique dans le film "Fast and furious". CCINP MP 2021

Course-poursuite dans les rues de Rio : une opération savamment préparée ?

- 1) On a le schéma ci-dessous :



La voiture est soumise :

- aux réactions de la route \vec{R}_1 et \vec{R}_2 respectivement appliquées en I_1 et en I_2 ;
- à son poids $m\vec{g}$ appliqué en G ;
- à la force exercée par le filin. Comme celui-ci est sans masse, cette force est $-\vec{F}$, opposé de la force exercée par le filin sur le conteneur.

Remarque : les actions exercées par le moteur sur la roue avant sont des forces internes au système {voiture}.

- 2) Le filin étant tendu, le conteneur possède la même vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_x$ constante que la voiture (le conteneur étant en translation, tous les points de celui-ci ont la même vitesse \vec{V}). Le théorème du centre d'inertie (TCI) appliqué dans le référentiel terrestre supposé galiléen conduit à :

$$m_0 \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{R_T} = \vec{0} = m_0 \vec{g} + \vec{R}_0 + \vec{F} = m_0 \vec{g} - T_0 \vec{e}_x + N_0 \vec{e}_z + \vec{F}$$

En projection sur (\vec{e}_x, \vec{e}_y) on obtient :

$$N_0 = m_0 g \quad \text{et} \quad F = T_0$$

Or, comme le conteneur glisse sur la route, la loi de Coulomb s'applique et la réaction tangentielle est opposée à la vitesse de glissement, donc $T_0 > 0$. De plus, $T_0 = f_0 N_0 = f_0 m_0 g$. On a donc :

$$\vec{F} = f_0 m_0 g \vec{e}_x$$

- 3) a) La vitesse du système { carrosserie + moteur + conducteur } étant constante dans le référentiel terrestre, l'énergie cinétique E_c reste constante.

Les forces extérieures sont les réactions de la route \vec{R}_1 et \vec{R}_2 de puissances nulles d'après l'énoncé, le poids $m\vec{g}$ de puissance nulle car orthogonal à \vec{V} et la force $-\vec{F}$ de puissance $-\vec{F}\cdot\vec{V}$. On a donc :

$$\left(\frac{dE_c}{dt}\right)_{\mathcal{R}_T} = 0 = P_m - \vec{F}\cdot\vec{V}$$

d'où :

$$P_m = \vec{F}\cdot\vec{V}$$

- b) On a donc :

$$P_m = f_0 m_0 g V \stackrel{AN}{=} 0,4 \times 4500 \times 10 \times 190\,000 / 3600 = 950 \text{ kW}$$

ce qui représente 1291 ch. Vu que la valeur moyenne des puissances des voitures circulant en France est de 117 ch, que la puissance d'un camion semi-remorque est de l'ordre de 400 ch, ce chiffre est donc totalement irréaliste, même avec deux voitures !

- 4) a) Si S est un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe dans un référentiel galiléen muni d'un repère R , que O est un point de Δ et que \vec{u} est le vecteur unitaire directeur de Δ , alors :
- Si $\vec{L}_O(S/R)$ est le moment cinétique de S par rapport à O , sa projection sur l'axe de rotation Δ s'écrit :

$$L_\Delta = \vec{L}_O(S/R) \cdot \vec{u} = J_\Delta \omega$$

où J_Δ est le moment d'inertie de S par rapport à Δ et ω la vitesse angulaire de rotation de S autour de Δ .

- Si $\vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}})$ est le moment par rapport à O des forces exercées par l'extérieur sur S , sa projection sur Δ s'écrit :

$$M_\Delta = \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}}) \cdot \vec{u}$$

- Le théorème scalaire du moment cinétique s'écrit alors :

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = M_\Delta$$

- b) • Pour la roue arrière :

La réaction du sol \vec{R}_1 , le poids de la roue qui s'applique en O_1 (centre de la roue), les actions de la liaison pivot dont le moment est nul si cette liaison est parfaite.

- Pour la roue avant :

La réaction du sol \vec{R}_2 , le poids de la roue qui s'applique en O_2 (centre de la roue), les actions de la liaison pivot dont le moment est nul si cette liaison est parfaite et le moment des actions du moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma_m \vec{e}_y$.

c) On applique le TMC à chaque roue dans le référentiel de la carrosserie, galiléen puisqu'en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen.

- **Roue arrière** : l'axe de rotation est $\Delta_1 = O_1 \vec{e}_y$. La vitesse angulaire ω_1 étant constante on a :

$$J_{\Delta_1} \frac{d\omega_1}{dt} = 0 = M_{\Delta_1}(\vec{R}_1) + \underbrace{M_{\Delta_1}(\text{poids})}_{=0} + \underbrace{M_{\Delta_1}(\text{pivot})}_{=0} = -\frac{d}{2} T_1$$

d'où : $T_1 = 0$

- **Roue avant** : l'axe de rotation est $\Delta_2 = O_2 \vec{e}_y$. La vitesse angulaire ω_2 étant constante il vient :

$$J_{\Delta_2} \frac{d\omega_2}{dt} = 0 = M_{\Delta_2}(\vec{R}_2) + \underbrace{M_{\Delta_2}(\text{poids})}_{=0} + \underbrace{M_{\Delta_2}(\text{pivot})}_{=0} + M_{\Delta_2}(\text{moteur}) = -\frac{d}{2} T_2 + \Gamma_m$$

d'où $\Gamma_m = T_2 \frac{d}{2}$.

- 5) a) On applique le théorème du centre d'inertie (TCI) à la voiture dans le référentiel terrestre, en projection sur \vec{e}_x . L'accélération de G étant nulle, on obtient :

$$0 = -F + T_1 + T_2 \quad \text{d'où} \quad F = T_2$$

b) On en déduit :

$$\Gamma_m = F \frac{d}{2} = f_0 m_0 g \frac{d}{2} \vec{e}_x$$

A.N. $\Gamma_m = 4500 \text{ N.m}$ (couple moteur).

- 6) a) Parce qu'il s'agit d'une force intérieure au système {voiture}. Or le TMC ne fait intervenir que les forces exercées par l'extérieur sur le système étudié.

b) Si on applique le TCI à la voiture dans le référentiel terrestre et qu'on projette sur \vec{e}_z , on obtient l'équation :

$$N_1 + N_2 = mg$$

On a donc deux équations à deux inconnues N_1 et N_2 qu'on peut facilement résoudre pour obtenir :

$$N_1 = \frac{mg}{2} + \frac{T_2 h}{2b} = \frac{mg}{2} + \frac{f_0 m_0 g h}{2b}$$

et

$$N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{T_2 h}{2b} = \frac{mg}{2} - \frac{f_0 m_0 g h}{2b}$$

- 7) a) Puisque $T_1 = 0$, la loi de Coulomb est toujours vérifiée pour la roue arrière : elle ne glissera donc jamais. En revant la roue avant ne glisse pas tant que :

$$|T_2| = f_0 m_0 g < f_s \left(\frac{mg}{2} - \frac{f_0 m_0 g h}{2b} \right)$$

b) On isole m_0 pour trouver :

$$m_0 f_0 g \left(1 + f_s \frac{h}{2b} \right) < f_s \frac{mg}{2}$$

d'où le résultat :

$$m_0 < m \frac{f_s}{2f_0 \left(1 + f_s \frac{h}{2b} \right)} = m_{0,\max}$$

c) A.N. : $m_{0,\max} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ kg} = 3,2 \text{ tonnes}$. Cette masse semble être un bon ordre de grandeur pour un conteneur (qui doit sûrement contenir beaucoup de lingots d'or). On peut donc concevoir que la voiture ne glisse pas.

8) a) On échange alors les rôles des roues avant et arrière. Le TMC scalaire appliqué à chacune des roues conduit à :

$$\Gamma_m = T_1 \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad T_2 = 0$$

Le TCI appliqué à la voiture conduit alors à : $T_1 = F = f_0 m_0 g$.

b) Dans ce cas, c'est la roue avant qui ne glissera jamais alors que la roue arrière risque de dérapage. Il n'y a pas de dérapage tant que :

$$|T_1| = f_0 m_0 g < f_s \left(\frac{mg}{2} + \frac{f_0 m_0 g h}{2b} \right)$$

c) La résolution de l'inégalité précédente conduit alors à :

$$m_0 < m \frac{f_s}{2f_0 \left(1 - f_s \frac{h}{2b} \right)} = m'_{0,\max}$$

d) A.N. : $m'_{0,\max} = 4,6 \cdot 10^3 \text{ kg} = 4,6 \text{ tonnes}$. Ceci améliore donc les choses du moins au niveau de l'absence de glissement (mais pas au niveau de la puissance nécessaire).