TD n^{o}9 - Équations locales de l'électromagnétisme

1 Champ électrique créé par une boule chargée

Déterminer en tout point de l'espace le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par une boule de rayon R uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charge ρ :

1. en utilisant le théorème de Gauss
2. en résolvant l'équation de Maxwell-Gauss.

2 Champ magnétique créé par un cylindre conducteur

Un cylindre infini de rayon a de d'axe Oz est parcouru par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j\,\vec{u}_z$. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ produit en tout point de l'espace :

1. en utilisant le théorème d'Ampère
2. en résolvant l'équation de Maxwell-Ampère.

3 Etude d'un champ électrique à distribution cylindrique

On considère le champ électrique $\overrightarrow{E}$ défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} E_r = \begin{cases} E_0\dfrac{r}{r_0} & \text{pour} \quad r \leq r_0 \\ E_0\dfrac{r_0}{r} & \text{pour} \quad r > r_0 \end{cases} \\ E_\theta = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer les lignes de champ. Tracer les variations de $\overrightarrow{E}$ le long de l'une de ces lignes.
2. En utilisant le formulaire d'analyse vectorielle, calculer $div\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{Rot}\overrightarrow{E}$ en tout point.
3. Si le champ $\overrightarrow{E}$ étudié ici est un champ électrostatique, quelle est la distribution de charge correspondante ?
4. Exprimer, par trois méthodes différentes, le flux $\Phi = \oiint_\Sigma \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{S}$, où Σ est un cylindre fermé d'axe Oz, de hauteur h et de rayon $r < r_0$.

Réponses : 4. $\Phi = \dfrac{2E_0\pi r^2 h}{r_0}$ pour $r < r_0$.

4 La particule passera-t-elle au travers ?

On considère la distribution volumique de charge suivante, décrite en coordonnées cartésiennes par :

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0 cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) & \text{si} \quad |x| < a \\ 0 \quad \text{si} \quad |x| > a \end{cases}$$

1. Déterminer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en tout point. Tracer l'allure de $E(x)$.
2. En déduire le potentiel électrostatique $V(x)$ en tout point sachant qu'il est nul pour $x \to \infty$. Tracer l'allure de $V(x)$ sur le graphe précédent.
3. Une charge ponctuelle q de masse m, est située initialement en $(-a, 0, 0)$ avec une vitesse $\overrightarrow{v}_0 = v_0\overrightarrow{e}_x$ $(v_0 > 0)$. Calculer la valeur minimale de la vitesse v_0 pour que la charge q traverse la distribution de charge.

Données : $a = 1,0\mu m$, $q = 1,6.10^{-19}C$, $m = 1,6.10^{-27}kg$, $\rho_0 = 1,0.10^8 C.m^{-3}$, $\epsilon_0 = 8,9.10^{-12}F.m^{-1}$.

5 Cylindre en rotation

Un cylindre conducteur de rayon a tourne autour de son axe de révolution avec une vitesse angulaire ω. Sa charge volumique est initialement nulle. On suppose que le matériau est constitué d'ions et d'électrons de conduction qui sont totalement dissociés des ions (électrons libres).

1. En régime permanent établi, en supposant que chaque électron libre (masse m et charge $-e$) est fixe dans le référentiel du conducteur, montrer qu'il existe un champ électrique $\overrightarrow{E}$ dans le conducteur. Donner son expression.
2. En déduire qu'il existe également une différence de potentiel entre l'axe et la surface du cylindre. Donner son expression.
3. Calculer la densité volumique de charge $\rho(r)$. Donner une justification qualitative de son signe.
4. Calculer la densité surfacique de charge en surface $\sigma(a)$ par deux méthodes. Donner une justification qualitative de son signe.

Donnée en coordonnées cylindriques : $div\left(E(r)\overrightarrow{U}_r\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE(r))$

Réponses : 1. $\overrightarrow{E} = \frac{m\omega^2 r}{e}\overrightarrow{e}_r$, 2. $V(a) - V(0) = -\frac{m\omega^2 a^2}{2e}$, 3. $\rho(r) = \frac{2\varepsilon_0 m\omega^2}{e}$, 4. $\sigma(a) = -\frac{\varepsilon_0 m\omega^2 a}{e}$.

6 Distribution non uniforme (🚘)

On considère une sphère de centre O, de rayon R, de densité volumique $\rho(r)$ non uniforme définie par :

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad r > R \\ \rho_0 \frac{r}{R} & \text{pour} \quad r < R \quad \text{avec} \quad \rho_0 > 0 \end{cases}$$

Déterminer le champ et le potentiel électrostatiques en tout point de l'espace :

1. en résolvant l'équation de Maxwell-Gauss ;
2. en utilisant le théorème de Gauss ;
3. en résolvant l'équation Poisson.

Réponses : $\overrightarrow{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}_r & \text{si} \quad r > R \\ \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R}\overrightarrow{u}_r & \text{si} \quad r < R \end{cases}$ et $V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r} & \text{si} \quad r > R \\ -\frac{\rho_0 r^3}{12\epsilon_0 R} + \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} & \text{si} \quad r < R \end{cases}$.

7 Expression de la divergence en coordonnées cylindriques (🚘)

Retrouver l'expression générale de la divergence en coordonnées sphériques en calculant le flux total du champ magnétique à travers la surface infinitésimale fermée ci-dessous.