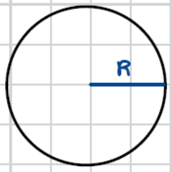
# TD n$^o$9 - Équations locales de l'électromagnétisme - Correction des exercices en autonomie

## 1 Distribution non uniforme




$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$ si $r<R$

Dcharge à symétrie sphérique $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u_r}$

1) M-G : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$

- Si $r<R$ $\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E(r))}{r^2} = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$

$$\frac{\partial(r^2E(r))}{\partial r} = \rho_0 \frac{r^3}{R\varepsilon_0}$$

Soit $r^2E(r) + c = \frac{\rho_0 r^4}{4R\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0 r^2}{4R\varepsilon_0} - \frac{c}{r^2}$

pour $r=0$, on est à l'intersection de 3 $\Pi_{sym}$ donc $\vec{E} = \vec{0}$ soit $c=0$

- Si $r>R$ $\frac{\partial(r^2E(r))}{\partial r} = 0 \Rightarrow r^2E(r) = c'$

$\Rightarrow E(r) = \frac{c'}{r^2}$ Comme $\nexists\sigma$, $E$ est continue en $R$ donc $\frac{c'}{R^2} = \frac{\rho_0 R^2}{4R\varepsilon_0} \Rightarrow c' = \rho_0\frac{R^3}{4\varepsilon_0}$

Soit $E(r) = \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r^2}$ donc $\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R}\vec{u_r} & \text{si } r<R \\ \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r} & \text{si } r>R \end{cases}$

2) Thm de Gauss $\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E(r)$

Si $r<R$ $Q_{int} = \iiint_V \rho(r)\,d\tau = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2\,dr' = \int_0^r \rho_0\frac{r'}{R}4\pi r'^2\,dr' = \pi\frac{\rho_0 r^4}{R}$

Soit $E(r) = \frac{\rho_0 r^2}{R4\varepsilon_0}$

Si $r>R$ $Q_{int} = \pi\rho_0 R^3$ donc $E(r) = \frac{R^3\rho_0}{4\varepsilon_0 r^2}$

3) Poisson $\Delta V = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$

formulaire

$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)$

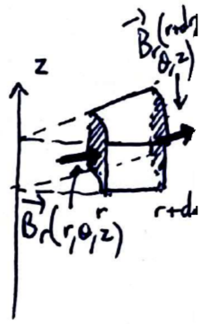
4 constantes d'intégration à déterminer
- $V \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$ (ou $V(0)=0$)
- par continuité en $r=R$
- Pas de divergence en $r=0$
- $\vec{E}$ continue $\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r}(r=R-) = \frac{\partial V}{\partial r}(r=R+)$

## 2 Expression de la divergence en coordonnées cylindriques

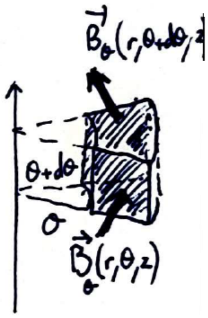
Le volume infinitésimal $d\tau = dr \times r d\theta \times dz$ en coordonnées cylindriques délimite sur surface fermée $\Sigma$, et comme $\vec{B}$ est à flux conservatif, on en déduit :

$$\Phi_{\vec{B}/\Sigma} = \oiint_{\Sigma} \vec{B}\cdot d\vec{S}_{ext} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{th. d'Ostrogradsky}}}{=} \iiint_{\mathcal{V} \text{ délimité par } \Sigma} \operatorname{div}\vec{B}\, d\tau \underset{\substack{\uparrow \\ \text{volume élémentaire} \\ \mathcal{V} \equiv d\tau}}{=} \operatorname{div}\vec{B}\, d\tau \underset{\substack{\uparrow \\ \text{flux conservatif} \\ \text{à travers} \\ \Sigma \text{ fermée}}}{=} 0$$

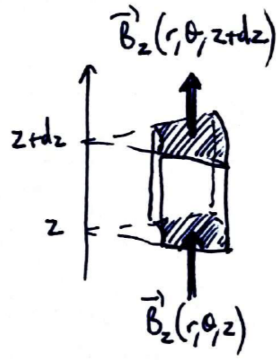
$$\Phi_{\vec{B}/\Sigma} = \Phi_{1(\text{selon } \vec{u}_r)} + \Phi_{2(\text{selon } \vec{u}_\theta)} + \Phi_{3(\text{selon } \vec{u}_z)}$$




$$\Phi_{1(\text{selon } \vec{u}_r)} = B_r(r,\theta,z)\, r d\theta dz - B_r(r+dr,\theta,z)(r+dr) d\theta dz$$
$$= -\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)\, dr \times \frac{r d\theta}{r} \times dz$$
$$= -\frac{\partial (rB_r)}{\partial r}\frac{d\tau}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial (rB_r)}{\partial r}\, d\tau$$




$$\Phi_{2(\text{selon } \vec{u}_\theta)} = B_\theta(r,\theta,z)\, dr dz - B_\theta(r,\theta+d\theta,z)\, dr dz$$
$$= -\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} d\theta\, dr\, dz$$
$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} d\tau$$




$$\Phi_3(\text{selon } \vec{u}_z) = B_z(r,\theta,z)\, r d\theta dr - B_z(r,\theta,z+dz)\, r d\theta dr$$
$$= -\frac{\partial B_z}{\partial z} dz\, r d\theta\, dr$$
$$= -\frac{\partial B_z}{\partial z} d\tau$$

Finalement, par identification :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}}$$

On retrouve bien la formule donnée dans la fiche d'analyse vectorielle.