

## Documents de cours - Équations locales de l'électromagnétisme

### Table des matières

#### I Un peu d'analyse vectorielle...

- I.1 Opérateurs scalaires et vectoriels . . . . .
- I.2 Théorèmes d'analyse vectorielle . . . . .

#### II Conservation de la charge et conséquences

- II.1 Équation locale de conservation de la charge . . . . .
- II.2 Loi des noeuds et des branches en régime stationnaire . . . . .

#### III Équations de Maxwell

- III.1 Équations de Maxwell : formulation locale . . . . .
- III.2 Équations de Maxwell : formulation intégrale . . . . .
- III.3 Retour sur l'équation de conservation de la charge . . . . .

#### IV Équations de propagation des champs dans le vide

- IV.1 Equations de Maxwell dans une région vide de charges et de courants . . . . .
- IV.2 Équation de propagation du champ  $\vec{E}$  dans le vide . . . . .
- IV.3 Équation de propagation du champ  $\vec{B}$  dans le vide . . . . .
- IV.4 Invariance des équations de Maxwell par changement de référentiel galiléen . . . . .

#### V Équations locales en électrostatique et magnétostatique

- V.1 Équations de Maxwell en régime statique . . . . .
- V.2 Équation de Poisson en régime statique . . . . .
- V.3 Équation de Laplace dans le vide, en régime statique . . . . .
- V.4 Résolution numérique des équations statiques par itération . . . . .

### Introduction

Nous avons sommes pour l'instant limités à l'*électrostatique* et à la *magnétostatique*, pour lesquels les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  étaient découplés. Nous allons ici aborder l'électromagnétisme dans un domaine plus large, comprenant les régimes variables, pour lesquels champs électrique et magnétique sont indissociables et forment le **champ électromagnétique**. Nous introduirons notamment les **équations de Maxwell** régissant le couplage entre ce champ et les sources (charges et courants).

## I Un peu d'analyse vectorielle...

Nous aurons besoin de nouveaux opérateurs mathématiques afin de formaliser de façon compacte les notions d'électromagnétisme. Nous les introduisons ici de façon non exhaustive<sup>1</sup>, et nous verrons leur signification physique par la suite.

### I.1 Opérateurs scalaires et vectoriels

On notera que tous les opérateurs présentés ensuite sont linéaires.

#### a) Opérateur gradient

Le **gradient** qui est un opérateur *vectoriel* agissant sur un *scalaire*.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes<sup>2</sup>, pour une fonction  $f$  *scalaire* :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

#### b) Opérateur divergence

La **divergence** est un opérateur *scalaire* agissant sur une grandeur *vectorielle*.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes<sup>3</sup> :

$$\text{Div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Afin de retenir cette expression *en coordonnées cartésiennes uniquement*, on peut l'écrire sous la forme d'un produit scalaire :

$$\text{Div } \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

1. On se reportera au formulaire d'analyse vectorielle pour davantage de détails.

2. Les expressions en coordonnées cylindriques et sphériques seront systématiquement données dans les énoncés des problèmes.

3. Les expressions en coordonnées cylindriques et sphériques seront systématiquement données dans les énoncés des problèmes.

### c) Opérateur rotationnel

La **rotationnel** est un opérateur *vectoriel* agissant sur une grandeur *vectorielle*.

En coordonnées cartésiennes<sup>4</sup> :

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{a} = \left[ \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right] \vec{u}_x + \left[ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right] \vec{u}_y + \left[ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right] \vec{u}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Afin de retenir cette expression *en coordonnées cartésiennes uniquement*, on peut l'écrire sous la forme d'un produit vectoriel :

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

### d) Opérateurs Laplacien scalaire et Laplacien vectoriel

Le **Laplacien** est :

— soit un opérateur *scalaire* agissant sur une grandeur *scalaire*, et on le note  $\Delta$ . Pour une fonction *f scalaire*, en coordonnées cartésiennes<sup>5</sup> :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Afin de retenir cette expression *en coordonnées cartésiennes uniquement*, on peut l'écrire sous la forme d'un produit scalaire :

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f$$

— soit un opérateur *vectoriel* agissant sur une grandeur *vectorielle*, et on le note  $\vec{\Delta}$ . Pour une grandeur  $\vec{a}$  *vectorielle*, en coordonnées cartésiennes<sup>6</sup> :

$$\vec{\Delta} \vec{a} = \left[ \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right] \vec{u}_x + \left[ \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right] \vec{u}_y + \left[ \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right] \vec{u}_z$$

Afin de retenir cette expression *en coordonnées cartésiennes uniquement*, on peut l'écrire sous la forme d'un produit scalaire :

$$\vec{\Delta} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

4. Les expressions en coordonnées cylindriques et sphériques seront systématiquement données dans les énoncés des problèmes.

5. Les expressions en coordonnées cylindriques et sphériques seront systématiquement données dans les énoncés des problèmes.

6. Les expressions en coordonnées cylindriques et sphériques seront systématiquement données dans les énoncés des problèmes.

### d) Opérateur Nabla

Un moyen mnémotechnique pour retenir les expressions des trois opérateurs précédents **en coordonnées cartésiennes uniquement**, est de les exprimer à l'aide de l'opérateur *vectorel Nabla*, noté  $\vec{\nabla}$  et défini par :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On peut ainsi écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$$

$$\overrightarrow{\text{Div}} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$$

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Delta} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{a} = \vec{\nabla}^2 \vec{a}$$

On veillera cependant bien à ne pas utiliser cette notation dans les devoirs.

#### Exemple

On considère les deux champs de vecteurs ci-dessous :

- $\vec{A} = K [-y \vec{u}_x + x \vec{u}_y]$

1. Calculer les opérateurs divergence, rotationnel et Laplacien vectoriel associé au champ de vecteur  $\vec{A}$ .
2. Déterminer l'allure des lignes de champ.

## I.2 Théorèmes d'analyse vectorielle

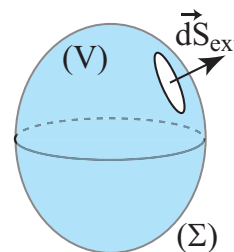
Introduisons maintenant deux théorèmes d'analyse vectorielle qui nous seront utiles dans tout le cours d'électromagnétisme.

### a) Théorème d'Ostrogradsky

**Théorème d'Ostrogradsky :**

$$\forall \vec{a}, \forall (\Sigma) \text{ fermée, } \underbrace{\oint_{(\Sigma)} \overbrace{\vec{a} \cdot \vec{dS}_{ext}}^{d\Phi}}_{\text{flux de } \vec{a}} = \iiint_{(V)} \text{Div } \vec{a} \, d\tau$$

où  $(\Sigma)$  est une surface *fermée* de volume intérieur  $(V)$ , orientée vers l'extérieur **par convention**.



#### Remarque

Ce théorème permet de comprendre l'origine du terme de "divergence" : localement,  $d\Phi = \text{Div } \vec{a} \, d\tau$ , et donc :

- si  $\text{Div } \vec{a} > 0$ ,  $d\Phi > 0$  donc  $\vec{a}$  diverge ;
- si  $\text{Div } \vec{a} < 0$ ,  $d\Phi < 0$  donc  $\vec{a}$  converge.

**b) Théorème de Stokes**

**Théorème de Stokes :**  $\forall \vec{a}, \forall (C) \text{ fermé, } \underbrace{\oint_{(C)} \vec{a} \cdot \overbrace{d\vec{\ell}}^{\text{dC}}}_{\text{circulation de } \vec{a}} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{a} \cdot \vec{dS}_{\text{orientée}}$

où  $(C)$  est un contour fermé et orienté, et  $(S)$  une surface quelconque s'appuyant sur  $(C)$ , et orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle de la main droite.

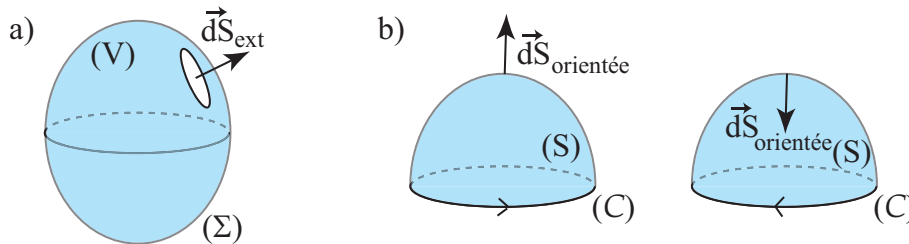


FIGURE 1 – a) Par convention, pour une surface fermée, on oriente toujours le vecteur surface élémentaire  $\vec{dS}$  vers l'extérieur de celle-ci. b) En revanche, lorsque la surface considérée est ouverte, le sens de  $\vec{dS}$  dépend de la convention choisie - qu'il faut donc préciser !- et est orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell.

Remarque

Ce théorème permet de comprendre l'origine du terme de "rotationnel" : localement,  $dC = \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{a} \cdot \vec{dS}$ , et donc :

- si  $\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{a} \neq 0$ , alors  $\vec{a}$  tourne le long du contour  $C$ .
- si  $\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{a} = 0$ , alors  $\vec{a}$  ne tourne pas le long de  $C$ .

## II Conservation de la charge et conséquences

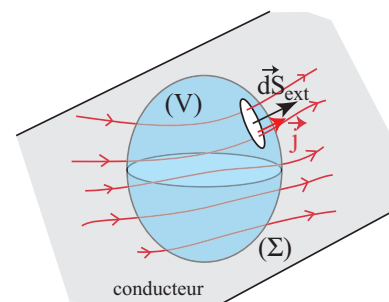
### II.1 Équation locale de conservation de la charge

**a) Cas général sans source ni puits de charges**

Considérons un volume élémentaire  $(V)$  fixe<sup>a</sup> et indéformable limité par une surface fermée  $(\Sigma)$ .

La conservation de la charge est un principe physique général toujours vérifié, qu'il s'agisse d'une collision entre atomes, ions ou molécules, d'une désintégration radioactive, ou d'un échange énergie-matière. Cherchons à exprimer ce principe à l'intérieur de la surface  $(\Sigma)$  fixe.

<sup>a</sup> Le fait que le volume soit fixe n'est pas restrictif, car les porteurs de charges se déplacent en général à des vitesses très supérieures à la vitesse de déplacement du circuit. Sinon, on peut toujours se placer dans le référentiel du conducteur en mouvement.



$\alpha)$  Expression intégrale

$\beta)$  Expression locale

**b) Cas unidimensionnel sans source ni puits de charges**

Exemple : circulation de charges dans un fil.



**c) Cas d'une géométrie cylindrique sans source ni puits de charges**

Exemple : émission radiale de charges au niveau d'un fil ; désintégration radioactive avec émission de particules  $\alpha$  chargées positivement.

**Remarque**

|| Attention, on ne développera jamais la dérivée partielle pour garder l'équation sous forme compacte et pour pouvoir la résoudre plus facilement.

**d) Cas d'une géométrie sphérique sans source ni puits de charges**

Exemple : source radioactive ponctuelle placée en  $O$ .

## II.2 Loi des noeuds et des branches en régime stationnaire

En régime **stationnaire**,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , et donc d'après l'équation de conservation de la charge :

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Donc, en vertu du théorème d'Ostrogradsky :

$$0 = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{j} \, d\tau = \oiint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{ext} = I_{sortant}$$

Le vecteur densité de courant est alors à *flux conservatif*, c'est à dire que le flux de  $\vec{j}$ , et donc le courant, à travers toute surface fermée ( $\Sigma$ ) est nul.

### a) Loi des noeuds en régime stationnaire

Considérons maintenant un noeud électrique entre plusieurs branches.

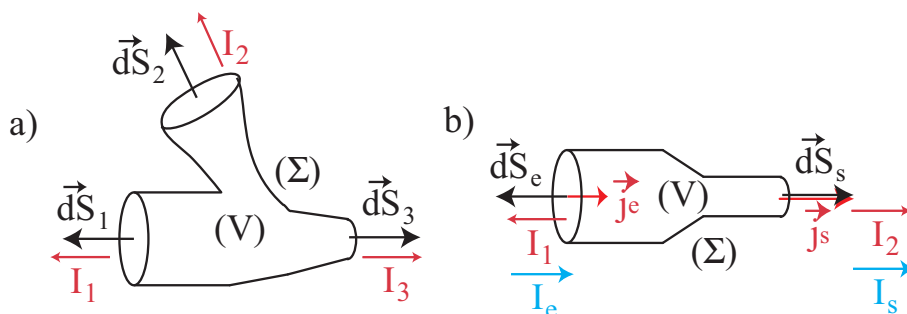


FIGURE 2 – a) Illustration de la loi des noeuds. b) Illustration de la loi des branches.

D'après la propriété précédente :

$$I_1 + I_2 + I_3 + \underbrace{I_{lat}}_{=0} = 0$$

La somme algébrique des courants *arrivant* (ou *partant*) est donc nulle. C'est ce qui constitue la *loi des noeuds*. Aucun courant ne traverse la surface latérale, ce qui explique que le flux ne soit non nul que par endroits.

### b) Loi des branches en régime stationnaire

Un fil électrique constitue un *tube de champ*. La conséquence de la propriété précédente est la **conservation du courant  $I$  dans un fil en régime stationnaire**<sup>7</sup> :

$$I_1 + I_2 + \underbrace{I_{lat}}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_s - I_e + \underbrace{I_{lat}}_{=0} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{I_s = I_e}$$

où l'intensité entrante  $I_e$  est comptée négativement et l'intensité sortante  $I_s$  positivement d'après l'orientation des vecteurs surface entrant  $\vec{dS}_e$  et sortant  $\vec{dS}_s$  de la surface fermée ( $\Sigma$ ). Le courant  $I_{lat}$  à travers la surface latérale est nulle car  $\vec{j} \perp \vec{dS}_{lat}$ .

D'après ce qui précède, le courant est constant dans tout le fil, et c'est ce qui constitue la *loi des branches*.

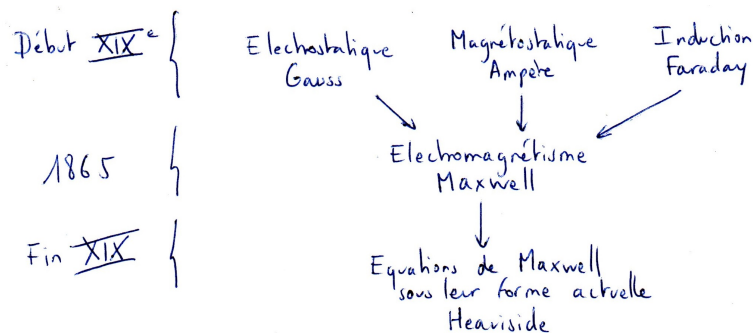
7. On retrouve la conservation du flux de  $\vec{B}$  à travers un tube de champ, qui découle du fait que  $\vec{b}$  est à flux conservatif.

### III Équations de Maxwell

Ces équations traduisent sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissaient l'électromagnétisme avant que Maxwell ne les réunisse sous forme d'équations intégrales. Elles donnent ainsi un cadre mathématique précis au concept fondamental de champ introduit en physique par Faraday dans les années 1830.

Vers 1865, Maxwell a réalisé une synthèse harmonieuse des diverses lois expérimentales découvertes par ses prédécesseurs (lois de l'électrostatique, du magnétisme, de l'induction...). Mais cette synthèse n'a été possible que parce que Maxwell a su dépasser les travaux de ses prédécesseurs, en introduisant dans une équation un « chaînon manquant », appelé le courant de déplacement, dont la présence assure la cohérence de l'édifice unifié.

Ce n'est que plus tard qu'Heaviside réécrivit ces équations sous la forme des 4 équations vectorielles aux dérivées partielles que nous allons présenter.



On notera que les équations de Maxwell constituent les **postulats de base de l'électromagnétisme**, avec l'expression de la force électromagnétique de Lorentz.

Dans tout ce chapitre, on considérera que le référentiel d'étude est **galiléen** : c'est dans ce type de référentiel que les équations de Maxwell sont valables.

#### III.1 Équations de Maxwell : formulation locale

Les champs  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  sont couplés et forment le champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$  car ils vérifient *localement*, c'est à dire en un point  $M$ , à tout instant  $t$ , les quatre équations de Maxwell qui s'écrivent<sup>8</sup> :

où  $\rho(M, t)$  et  $\vec{j}(M, t)$  sont les densités volumiques de charge et de courant au point  $M$  à l'instant  $t$ . Les constantes  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la *permittivité diélectrique du vide* et la *perméabilité magnétique du vide* qui vérifient :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.} \quad \text{et} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I.}$$

8. Attention, on veillera à ne **jamais** faire apparaître les densités surfaciques de charges et de courant  $\sigma$  et  $\vec{j}_s$  dans les équations de Maxwell. Dans le cas de l'existence de telles distributions, à la surface des conducteurs, on utilisera les relations de continuité présentées plus loin.

Nous verrons qu'elles sont reliées à la vitesse de la lumière dans le vide par la relation :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

### Remarque

• On voit donc que les 4 équations de Maxwell sont **linéaires** et qu'elles relient le champ électromagnétique  $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$  aux sources  $\rho(M,t)$  et  $\vec{j}(M,t)$ . En particulier, on voit qu'un champ électrique peut avoir deux types de sources différentes : la présence de charges, mais aussi une variation de champ magnétique. Ce second phénomène est à l'origine de tout un domaine de la physique déjà abordé en partie en première année : l'induction électromagnétique.

## III.2 Équations de Maxwell : formulation intégrale

### a) Conséquences de l'équation de Maxwell-Gauss (MG) : théorème de Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0}$$

• Cette équation permet de démontrer le **théorème de Gauss**. Considérons un volume<sup>9</sup> ( $V$ ) délimité par une surface *fermée* ( $\Sigma$ ). Le flux  $\Phi$  à travers cette surface peut s'écrire, en vertu du théorème d'Ostrogradsky :

• D'après le théorème de Gauss, si  $Q_{int} > 0$ , le champ  $\vec{E}$  est globalement dirigé suivant le vecteur  $\vec{dS}_{ext}$ , et les lignes de champ divergent, ce qui explique le choix du nom de l'opérateur "**divergence**".

De même, on peut montrer que les lignes de champ convergent vers les charges négatives.

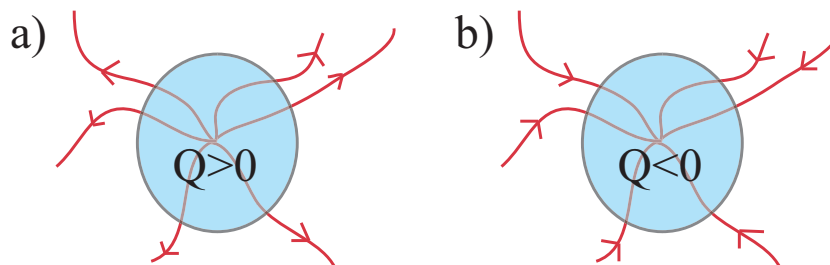


FIGURE 3 – a) Le champ électrique diverge des charges positives et b) converge vers les charges négatives.

### b) Conséquences de l'équation de Maxwell-Thomson (MT) : $\vec{B}$ est à flux conservatif

L'équation de Maxwell-Thomson, encore appelée Maxwell-Flux, s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0$$

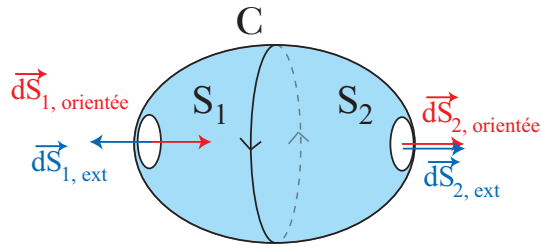
• Il n'y a aucune source de divergence de  $\vec{B}$  : il n'existe pas de "monopôles magnétiques" qui seraient analogues aux charges électriques.

9. On notera que le volume n'est pas nécessairement fixe ici.

- Le flux de  $\vec{B}$  à travers toute surface fermée ( $\Sigma$ ) est nul car :

$$\Phi = \oiint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iiint_V \text{div} \vec{B} d\tau = 0$$

Considérons maintenant deux surfaces quelconques ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) s'appuyant sur un contour  $\mathcal{C}$  orienté. D'après la propriété précédente, avec ( $\Sigma$ ) =  $\{(S_1) \cup (S_2)\}$  :

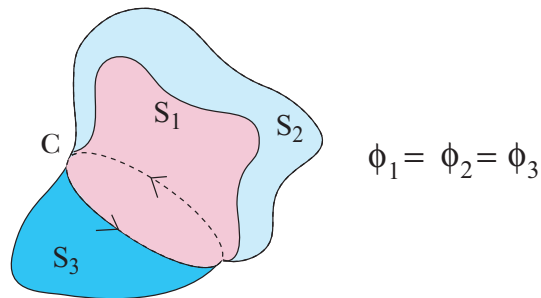


$$\begin{aligned} \oiint_{(\Sigma)=\{(S_1) \cup (S_2)\}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{ext} &= 0 \\ &= \oiint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{1,ext} + \oiint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{2,ext} \\ &= - \oiint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{1,orientée} + \oiint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{2,orientée} \\ &= \phi_2 - \phi_1 \end{aligned}$$

où les surfaces sont orientées à partir de l'orientation du contour d'après la règle de la main droite ou la règle du tire-bouchon de Maxwell.

On en déduit donc que  $\phi_1 = \phi_2$ , c'est à dire que le flux orienté de  $\vec{B}$  à travers n'importe quelle surface s'appuyant sur un contour orienté ne dépend que de  $\mathcal{C}$ .

On dit alors que  $\vec{B}$  est à flux conservatif.

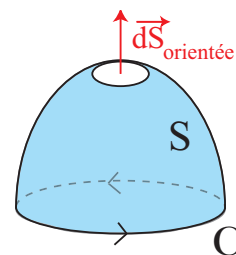


**c) Conséquences de l'équation de Maxwell-Faraday (MF) : loi de Faraday**

L'équation de Maxwell-Faraday (MF) couplant les champs électrique et magnétique s'écrit :

$$\text{rot} \vec{E}(M, t) = - \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

- Soit  $\mathcal{C}$  un contour fixe<sup>a</sup>, fermé et orienté, et ( $\Sigma$ ) une surface, également fixe, s'appuyant sur ce contour orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell. Le théorème de Stokes permet d'écrire la circulation du champ  $\vec{E}$  sur le contour  $\mathcal{C}$ , et est notée  $e$  (on rappelle que  $e$  est homogène à une tension (en V)) :



<sup>a</sup>. Le fait que le contour soit fixe a ici une importance puisque cela permet d'intervertir double intégrale spatiale et dérivée temporelle puisque les variables sont indépendantes dans ce cas.

Donc finalement <sup>10</sup> : 
$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Cette relation porte le nom de **loi de Faraday**, déjà rencontrée en induction dans le cas d'un circuit fixe.

10. On notera que le contour doit nécessairement être fermé pour pouvoir définir un flux.

- En régime *stationnaire*,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$  et donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

Cette équation ne couple donc plus les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , et le champ  $\vec{E}$  est **irrotationnel**, et donc qu'il existe un **potentiel électrostatique**  $V$  défini à une constante près, qui vérifie :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V}$$

En effet, on peut facilement montrer que  $\overrightarrow{\text{Rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} V) = \vec{0}$ .

Le signe "-" a été choisi par convention, de telle façon que le champ soit orienté dans le sens des potentiels décroissants, par analogie avec le champ de pesanteur qui est orienté dans le sens des énergies potentielles décroissantes.

*Attention* : on notera que cette expression n'est plus valable pour un régime dépendant du temps.

#### d) Conséquences de l'équation de Maxwell-Ampère (MA) : théorème d'Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère (MA), qui couple également les champs électrique et magnétique s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$$

- Soit  $\mathcal{C}$  un contour *fermé et orienté*<sup>11</sup>, enlaçant des courants et  $S$  une surface *fixe* s'appuyant sur ce contour, orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell. Le théorème de Stokes permet d'écrire la circulation du champ  $\vec{B}$  sur le contour  $\mathcal{C}$  :

où  $I_{\text{enlacé}}$  est compté algébriquement avec la règle du tire-bouchon de Maxwell. En régime stationnaire, on retrouve le **théorème d'Ampère**. En régime variable, on obtient une généralisation du théorème d'Ampère, en notant  $\vec{j}_{\text{tot}} = \vec{j} + \vec{j}_D$ , où  $\vec{j}_D$  est appelé *courant de déplacement*<sup>12</sup> et s'écrit :

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

11. On notera que le contour n'a pas besoin ici d'être fixe pour que la relation démontrée soit valable.

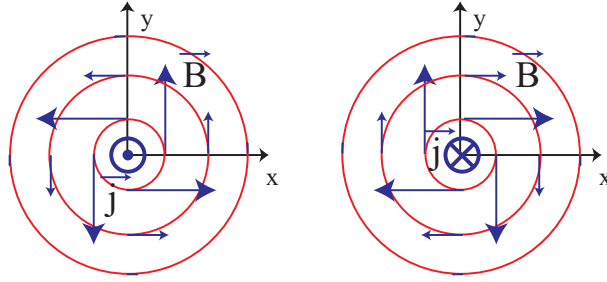
12. Ce terme s'appelle courant de déplacement bien qu'il ne corresponde tel quel ni à un courant, ni à un déplacement de charges. Il a été nommé ainsi historiquement par Maxwell lors de son étude des diélectriques, dans lesquels un déplacement de charges *liées* était responsable de l'existence d'un terme analogue à un courant, noté  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ , qui s'ajoute au terme  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . L'étude des diélectriques étant hors programme en MP, le courant de déplacement se limite à

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- En régime *stationnaire*,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$  et donc :  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

Cette équation ne couple donc plus les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

En utilisant le théorème d'Ampère, on en déduit donc que :  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} \text{c}.$  Comme le montre la figure ci-contre, le champ  $\vec{B}$  tourbillonne autour de ses sources (les courants électriques représentés ici par  $\vec{j}$ ), dans un sens qui dépend de l'orientation de la figure.



### III.3 Retour sur l'équation de conservation de la charge

La force de Lorentz et les équations de Maxwell étant posées comme seuls postulats, il devrait être possible de retrouver l'équation locale de conservation de la charge seulement à partir de ces deux postulats.

## IV Équations de propagation des champs dans le vide

Les équations de Maxwell font intervenir un couplage spatio-temporel qui permet d'expliquer la propagation des champs.

### IV.1 Equations de Maxwell dans une région vide de charges et de courants

## IV.2 Équation de propagation du champ $\vec{E}$ dans le vide

## IV.3 Équation de propagation du champ $\vec{B}$ dans le vide



#### IV.4 Invariance des équations de Maxwell par changement de référentiel galiléen

Considérons le changement de référentiel galiléen suivant :

- $\mathcal{R}$  référentiel galiléen  $\rightarrow \mathcal{R}'$  référentiel galiléen, en translation rectiligne uniforme par rapport au précédent, à la vitesse  $\vec{V}_0$
- champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (\vec{E}', \vec{B}')$

Examinons maintenant les conséquences de ce changement de référentiel sur les équations de Maxwell. Ces dernières sont invariantes par changement de référentiel puisque la vitesse n'intervient dans aucune d'entre elles, et on obtient donc également les mêmes équations de propagation pour les champs :

$$\vec{\Delta} \vec{E}' - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2} = \vec{0} \quad , \quad \vec{\Delta} \vec{B}' - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial t^2} = \vec{0}$$

La célérité des ondes n'a donc pas été modifiée et reste égale à  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  alors qu'on aurait pu s'attendre, en vertu de la transformation de Galilée, à une vitesse de propagation égale à  $c + V_0$  pour une onde se propageant colinéairement à la vitesse relative entre les deux référentiels.

#### Propriété

**Les équations de Maxwell sont incompatibles avec la transformation de Galilée**

Deux solutions s'offraient alors aux physiciens à la suite des travaux de Maxwell à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle :

1. Soit la transformation de Galilée est valide, et il faut corriger les équations de Maxwell en admettant que tous les référentiels galiléens ne sont en fait pas tous identiques et qu'il faut faire apparaître une vitesse  $\vec{V}_0$  par rapport à un référentiel absolu appelé **éther**. Dans ce cas, la vitesse de la lumière devrait dépendre du référentiel d'étude.
2. Soit la transformation de Galilée n'est pas assez générale, et les équations de Maxwell restent valables telles quelles dans tout référentiel galiléen. Nous voyons que ceci implique que la vitesse de la lumière est égale à  $c$  dans tous les référentiels galiléens.

Du point de vue théorique, ce sont Lorentz et Poincaré qui, vers la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, se sont intéressés à ce problème et ont déterminé la **transformation de Lorentz** qui permet de laisser invariants les champs électromagnétiques par changement de référentiel galiléen. Ce sont ces travaux qui ont permis à Einstein de bâtir sa théorie de la **relativité restreinte** au tout début du 20<sup>ème</sup> siècle, dans laquelle le principe de base est que **la vitesse de la lumière est égale à  $c$  dans tous les référentiels**.

Du point de vue expérimental, c'est Michelson qui a confirmé que la deuxième solution était bien à retenir : malgré tous les efforts de cet expérimentateur de génie, il n'a jamais réussi à montrer un quelconque effet de changement de référentiel sur la vitesse de la lumière. On notera qu'il a dans ce but inventé un appareil que nous étudierons en détail en optique : l'**interféromètre de Michelson**.

#### Remarque

*On notera que si les équations de Maxwell dans leur ensemble sont invariantes par changement de référentiel galiléen, il n'en est pas de même pour les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  pris séparément. En effet, d'après le principe de relativité, la force de Lorentz et la charge étant nécessairement invariantes par changement de référentiel, la force de Lorentz s'appliquant sur une charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  par rapport à  $\mathcal{R}$  s'écrit :*

$$\underbrace{\vec{F}}_{\text{indep du ref}}^{\text{Lor}} = \underbrace{q}_{\text{indep du ref}} \left( \underbrace{\vec{E}}_{\text{indep du ref}} + \underbrace{\vec{v}}_{\text{dep du ref}} \wedge \underbrace{\vec{B}}_{\text{indep du ref}} \right)$$

*Le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  dépend donc nécessairement du référentiel.*

## V Équations locales en électrostatique et magnétostatique

### V.1 Équations de Maxwell en régime statique

On remarque que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ne sont plus couplés, ce qui justifie que l'on puisse s'intéresser séparément à l'électrostatique puis à la magnétostatique.

### V.2 Équation de Poisson en régime statique

#### Analogie gravitationnelle :

Une distribution stationnaire de masse volumique  $\rho$  crée un champ gravitationnel  $\vec{G}$  qui satisfait les équations locales suivantes, analogues à (MG) et (MF) :

$$\operatorname{div} \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{G} = \vec{0} \quad (1)$$

où  $\mathcal{G}$  est la constante de la gravitation universelle. Par analogie avec le potentiel électrostatique  $V$  pour le champ électrostatique, la seconde équation permet d'assurer l'existence d'un potentiel gravitationnel  $\Phi$ , avec

$$\vec{G} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\Phi$$

On en déduit directement l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel :

$$\boxed{\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho}$$

### V.3 Équation de Laplace dans le vide, en régime statique

## V.4 Résolution numérique des équations statiques par itération

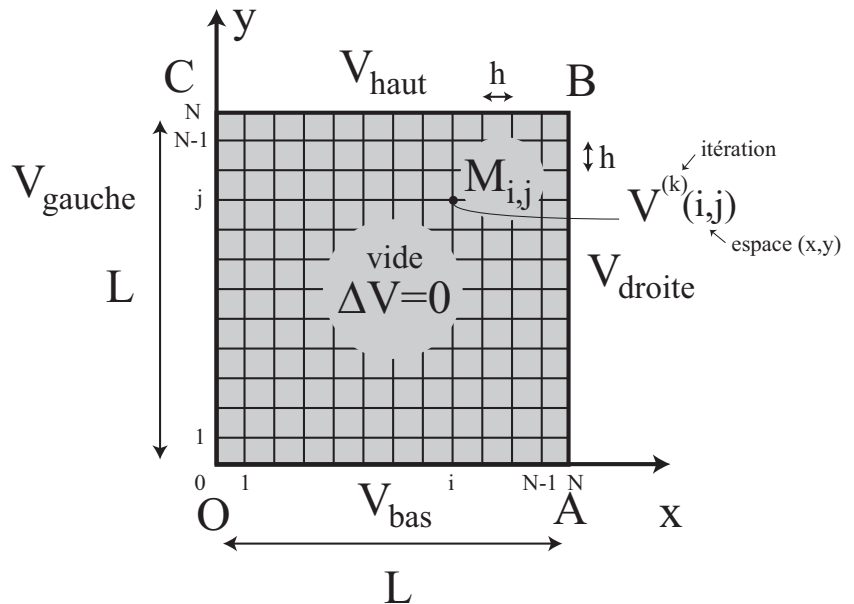
### Propriété

On notera qu'on peut montrer que les solutions des équations de Poisson et de Laplace sont uniques à partir du moment où l'on spécifie des conditions aux limites pour le potentiel lui-même (conditions de Dirichlet) ou bien pour sa dérivée (conditions de Neumann).

#### a) Équation de Laplace

Prenons dans le plan ( $Oxy$ ) une cavité 2D carrée de côté  $L$ , dont les quatre sommets  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont pour coordonnées respectives :  $O(0,0)$ ,  $A(L,0)$ ,  $B(L,L)$  et  $C(0,L)$ .

On suppose que chacune des arêtes est portée à un potentiel électrique donné :  $V_{bas}$  correspond au bord horizontal d'équation  $y = 0$ , puis  $V_{gauche}$ ,  $V_{haut}$  et  $V_{droite}$  correspondent respectivement aux bords d'équation  $x = 0$ ,  $y = L$  et  $x = L$ . Nous préciserons les valeurs de ces potentiels un peu plus loin.



La cavité est supposée vide de charge ce qui implique qu'en tout point  $M(x,y)$  de celle-ci, le potentiel satisfait à l'équation de Laplace (en dimension 2) :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Nous souhaitons résoudre cette équation par la méthode des différences finies. En développant à l'ordre 2 en  $h$  les expressions  $V(x \pm h, y)$  et  $V(x, y \pm h)$ , on obtient, avec  $h \ll x, y$  :

$$V(x+h, y) = V(x, y) + h \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2}$$

$$V(x-h, y) = V(x, y) - h \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2}$$

$$V(x, y+h) = V(x, y) + h \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2}$$

$$V(x, y-h) = V(x, y) - h \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2}$$

soit, en faisant la somme de ces 4 expressions :

$$V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h) = 4V(x, y) + h^2 \left[ \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} \right]$$

et en utilisant l'équation de Laplace, on obtient, à l'ordre 2 inclus en  $h$  :

$$V(x, y) = \frac{1}{4} [V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h)] \quad (2)$$

Le principe de la méthode est alors le suivant :

- On discrétise l'espace en choisissant un entier  $N$  suffisamment grand, ce qui permet de définir un "pas" :  $h = L/N$  que l'on peut rendre aussi petit qu'on veut. On gradue ainsi chaque côté du plan de 0 à  $N$ , à l'aide de  $N + 1$  points. Les points  $M$  de la cavité seront remplacés par un ensemble dénombrable de points  $M_{i,j}$  de coordonnées  $x_i = i \times h$  et  $y_j = j \times h$ , où  $i$  et  $j$  sont deux entiers variant de 0 à  $N$ .
- Le potentiel  $V(x, y)$  est remplacé par une matrice  $(N + 1) \times (N + 1)$  dont les éléments peuvent s'écrire :  $V(i, j)$ , où  $V(i, j)$  représente le potentiel au point  $M_{i,j}$ . L'égalité (2) s'écrit donc (avec  $i$  et  $j$  variant de 1 à  $N - 1$ , car les indices 0 et  $N$  correspondent aux bords, dont le potentiel est fixé) :

$$V(i, j) = \frac{1}{4}[V(i + 1, j) + V(i - 1, j) + V(i, j + 1) + V(i, j - 1)] \quad (3)$$

- On procède ensuite par itération. On commence par définir un premier potentiel  $V^{(1)}(i, j)$  de sorte que  $V^{(1)}$  ait les bonnes valeurs ( $V_{bas}$ ,  $V_{haut}$ , etc...) sur les bords du carré et soit nul à l'intérieur de celui-ci. On calcule ensuite une deuxième valeur  $V^{(2)}(i, j)$  du potentiel en utilisant l'égalité (2), avec dans le membre de droite, les expressions de  $V^{(1)}$  :

$$V^{(2)}(i, j) = \frac{1}{4}[V^{(1)}(i + 1, j) + V^{(1)}(i - 1, j) + V^{(1)}(i, j + 1) + V^{(1)}(i, j - 1)] \quad (4)$$

- À la  $k^i$ ème itération on aura calculé une matrice  $V^{(k)}(i, j)$  telle que :

$$V^{(k)}(i, j) = \frac{1}{4}[V^{(k-1)}(i + 1, j) + V^{(k-1)}(i - 1, j) + V^{(k-1)}(i, j + 1) + V^{(k-1)}(i, j - 1)] \quad (5)$$

- La procédure se termine lorsque, pour tout  $i$  et tout  $j$ , la différence  $|V^{(k+1)}(i, j) - V^{(k)}(i, j)|$  devient quasiment "nulle", à la précision recherchée dans les calculs. Cela signifie que, si  $\epsilon > 0$  est un réel petit ( $\epsilon = 0.01$  ou  $0.001$  ou ce que l'on souhaite comme précision pour le calcul), on arrête les itérations lorsque :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, N - 1\}, \quad |V^{(k+1)}(i, j) - V^{(k)}(i, j)| < \epsilon$$

On présente ci-dessous un exemple de résolution avec  $V_{haut} = 100$ ,  $V_{bas} = 200$ ,  $V_{gauche} = 100$  et  $V_{droit} = 150$ ,  $N = 30$  et  $\epsilon = 10^{-3}$ .

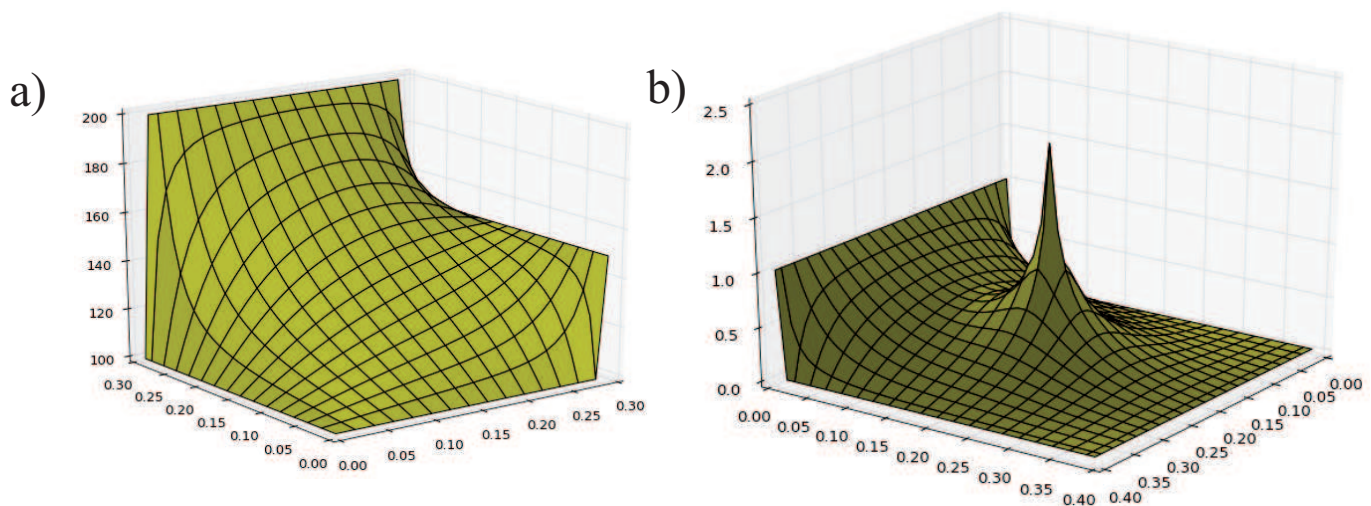


FIGURE 4 – a) Résolution d'une équation de Laplace à partir des conditions aux limites imposées sur les bords. b) Résolution d'une équation de Poisson en présence d'une charge et de conditions aux limites sur les bords.

#### Remarque

|| On notera que la résolution présentée ici s'applique également au cas de l'équation de Laplace vérifiée par la température en régime permanent :  $\Delta T = 0$ .

**b) Équation de Poisson**

Pour la résolution de ce type d'équation dont une résolution est présentée sur la figure ci-dessus, on se reportera à l'exercice correspondant dans le DM.

**Conclusion**

Nous avons introduit ici le cadre général de l'électromagnétisme qui nous sera utile pour tous les chapitres suivants. On gardera en tête que les ondes électromagnétiques auxquelles il a été fait référence ici comprennent l'ensemble du spectre, c'est à dire l'optique, les ondes radio, les rayons X, l'UV, l'IR.