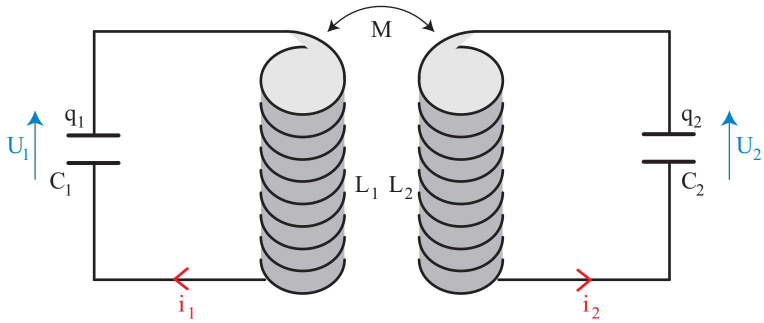
TD n°7bis - Induction - Complément Ex : 5

1 Oscillateurs couplés par induction mutuelle



Deux circuits électriques sont couplés par induction mutuelle, comme indiqué sur la figure ci-contre. On néglige la résistance électrique de chacun et on précise les relations suivantes :

$$L_1 = L_2 = L \quad , \quad C_1 = C_2 = C$$

1. Soient q_1 et q_2 les charges des condensateurs à l'instant t. En se basant sur la position initiale de la charge de chaque condensateur sur le schéma, expliquer pourquoi on a ici $i_1 = -C\dfrac{dU_1}{dt}$ et $i_2 = -C\dfrac{dU_2}{dt}$. En déduire un système différentiel en q_1 et q_2. On posera :

$$k = \frac{M}{L} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

2. À l'instant initial, le condensateur C_1 porte une charge Q tandis que C_2 est déchargé, les intensités dans les deux circuits sont nulles. Résoudre le système précédent.
3. Montrer que si $k \ll 1$, les fonctions $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont sinusoïdales du temps, de pulsation ω_0, modulées en amplitude à une pulsation Ω à déterminer.
4. En pratique, quels phénomènes vont limiter la durée des oscillations ?

Réponses : 1. $L\ddot{q_1} + M\ddot{q_2} + \dfrac{q_1}{C} = 0$ et $M\ddot{q_1} + L\ddot{q_2} + \dfrac{q_2}{C} = 0$.

2 Oscillateurs couplés par induction mutuelle

Attention : dans les deux circuits, on a $i = -\dfrac{dq}{dt}$ et $u = \dfrac{q}{C}$, et donc bien $i = -C\dfrac{du}{dt}$ car l'orientation est en convention générateur. En effet, la charge (et la tension de la même façon puisque la différence de potentiel diminue au cours du temps) diminue au cours du temps, soit $\dfrac{dq}{dt} < 0$, alors que le courant est positif dans le sens du schéma.

2. a) Les équations écrites dans chaque maille prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} u_1 = L\cdot\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+M\cdot\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{q_1}{C} \\ u_2 = M\cdot\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+L\cdot\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{q_2}{C}\end{cases} \text{ avec } \begin{cases} i_1 = -\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} \\ i_2 = -\dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}\end{cases}.$$

Après dérivation par rapport au temps, le système différentiel cherché peut s'écrire :

$$\begin{cases} L\cdot\ddot{q}_1+M\cdot\ddot{q}_2+\dfrac{q_1}{C}=0 \\ M\cdot\ddot{q}_1+L\cdot\ddot{q}_2+\dfrac{q_2}{C}=0\end{cases}.$$

b) Ces équations peuvent être découplées en introduisant la somme et la différence des variables : $\begin{cases} S = q_1+q_2 \\ D = q_1-q_2\end{cases}$; les équations différentielles obtenues sont respectivement : $\begin{cases}(L+M)\cdot\ddot{S}+\dfrac{S}{C}=0 \\ (L-M)\cdot\ddot{D}+\dfrac{D}{C}=0\end{cases}.$

En posant $\begin{cases}\omega = \dfrac{1}{\sqrt{(L+M)C}} \\ \omega' = \dfrac{1}{\sqrt{(L-M)C}}\end{cases}$ et compte tenu des conditions initiales : $\begin{cases} S(t) = Q\cdot\cos(\omega\cdot t) \\ D(t) = Q\cdot\cos(\omega'\cdot t)\end{cases}.$

Après sommation et soustraction de ces deux résultats, il vient :

$$\begin{cases} q_1(t) = Q\cdot\cos\left[\dfrac{\omega+\omega'}{2}\cdot t\right]\cdot\cos\left[\dfrac{\omega'-\omega}{2}\cdot t\right] \\ q_2(t) = Q\cdot\sin\left[\dfrac{\omega+\omega'}{2}\cdot t\right]\cdot\sin\left[\dfrac{\omega'-\omega}{2}\cdot t\right]\end{cases}$$

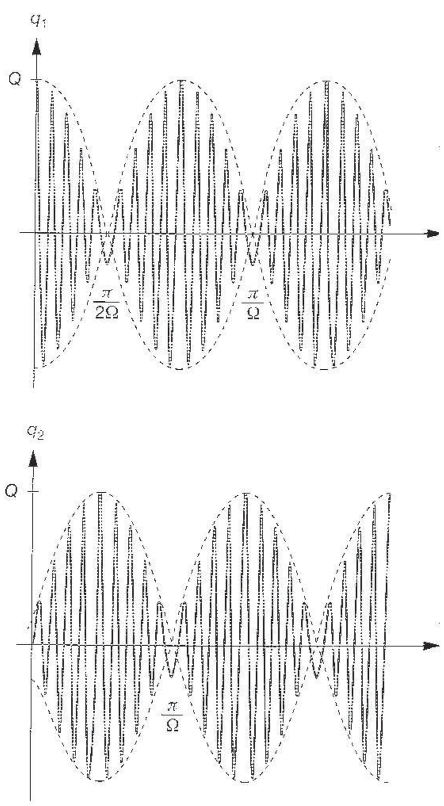
c) L'hypothèse $M \ll L$ permet de donner les expressions approchées suivantes :

$$\begin{cases}\dfrac{\omega+\omega'}{2}\approx\omega_0 \\ \Omega = \dfrac{\omega'-\omega}{2}\approx\dfrac{k}{2}\,\omega_0\end{cases} \text{ soit }$$

$$\begin{cases} q_1(t)\approx Q\cdot\cos[\omega_0\cdot t]\cdot\cos[\Omega\cdot t] \\ q_2(t)\approx Q\cdot\sin[\omega_0\cdot t]\cdot\sin[\Omega\cdot t]\end{cases}.$$

Il y a bien modulation de l'amplitude des oscillations à la pulsation ω_0 par un terme variant lentement à la pulsation Ω (Fig. 33).

d) En pratique, l'effet Joule dans les conducteurs entraîne un amortissement des oscillations.



Complément de l'exercice d'induction :

Système différentiel à résoudre : $\begin{cases} L\ddot{q_1} + M\ddot{q_2} + \dfrac{q_1}{C} = 0 \\ M\ddot{q_1} + L\ddot{q_2} + \dfrac{q_2}{C} = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = -LC\ddot{q_1} - MC\ddot{q_2} \\ q_2 = -MC\ddot{q_1} - LC\ddot{q_2} \end{cases} \underset{\substack{\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ k = \frac{M}{L}}}{\Rightarrow} \begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{\omega_0^2}\left(-\ddot{q_1} - k\ddot{q_2}\right) \\ q_2 = \dfrac{1}{\omega_0^2}\left(-k\ddot{q_1} - \ddot{q_2}\right) \end{cases}$$

Ecriture matricielle : $\underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\dfrac{-1}{\omega_0^2}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{q_1} \\ \ddot{q_2} \end{pmatrix}}_{\ddot{X}}$

$$\boxed{X = A\ddot{X}}$$

A est symétrique réelle et est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ on peut donc trouver une matrice de passage réelle tq $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale réelle.

$$\Rightarrow X = A\ddot{X} \Rightarrow X = PDP^{-1}\ddot{X} \Rightarrow \underbrace{P^{-1}X}_{Y} = D\,\underbrace{P^{-1}\ddot{X}}_{\ddot{Y}}$$

$\boxed{Y = D\ddot{Y}}$ (P indep du temps)

↳ système découplé.

Diagonalisation de A (valeurs propres λ_1 et λ_2)

* λ_1 et λ_2 tq $\det(A - \lambda I d) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow 1 - \lambda = \pm k$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1 = 1 - k} \\ \boxed{\lambda_2 = 1 + k} \end{cases}$$

* Vecteur propre associé à λ_1 tq : $(A - \lambda_1 I d)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{\omega_0^2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1-(1-k) & k \\ k & 1-(1-k) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$

soit tq $kx_1 + ky_1 = 0$

$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est associé à } \lambda_1 = 1 - k}$

⊛ vecteur propre associé à λ_2 tq : $(A-\lambda_2 Id)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\omega_0^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1-(1+k) & k \\ k & 1-(1+k) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

soit tq $-kx_2 + ky_2 = 0$

$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est associé à } \lambda_2 = 1+k}$

⊛ La matrice de passage peut donc s'écrire : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $Y = P^{-1} X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \\ \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D \\ S \end{pmatrix}$

où $S = q_1 + q_2$ (somme) et $D = q_1 - q_2$ (différence).

$Y = D\ddot{Y}$ se ramène donc à $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} D \\ S \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{D} \\ \ddot{S} \end{pmatrix} \times \left(\frac{-1}{\omega_0^2}\right)$

soit $\begin{cases} D = -\left(\frac{1-k}{\omega_0^2}\right)\ddot{D} \\ S = -\left(\frac{1+k}{\omega_0^2}\right)\ddot{S} \end{cases}$ soit $\boxed{\begin{cases} \ddot{D} + \frac{\omega_0^2}{(1-k)} D = 0 \\ \ddot{S} + \frac{\omega_0^2}{1+k} S = 0 \end{cases}}$

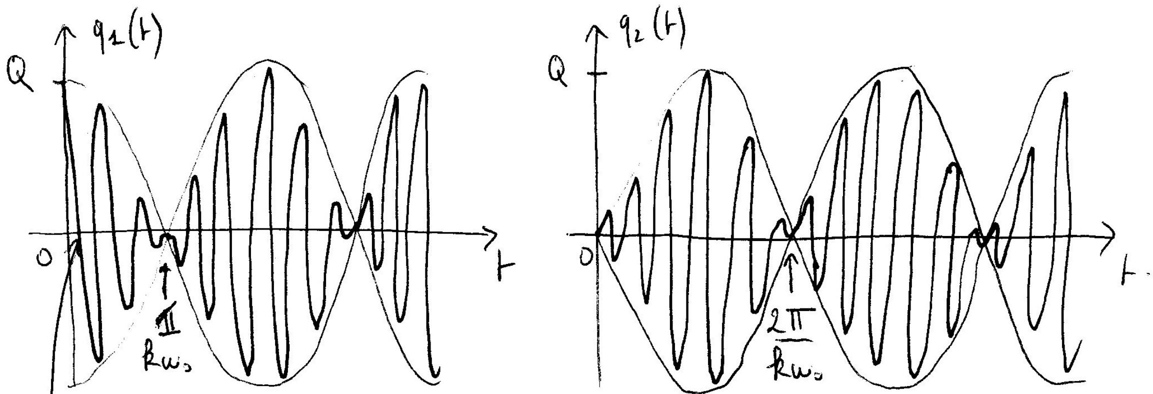
donc $\begin{cases} q_1(t) = \dfrac{Q}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\omega_0 t}{\sqrt{1+k}}\right) + \cos\left(\dfrac{\omega_0 t}{\sqrt{1-k}}\right)\right] = Q\cos\left(\dfrac{\omega_0}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+k}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-k}}\right)t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_0}{2}(\quad - \quad)t\right) \\ q_2(t) = \dfrac{Q}{2}\left[\text{——} \quad - \quad \text{——}\right] = Q\sin\left(\dfrac{\omega_0}{2}(\quad + \quad)t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_0}{2}(\quad - \quad)t\right) \end{cases}$

or $M \ll L \Rightarrow k \ll 1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+k}} \simeq 1 - \dfrac{k}{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{1-k}} \simeq 1 + \dfrac{k}{2}$

donc $\boxed{\begin{cases} q_1(t) \simeq Q\cos(\omega_0 t)\cos\left(\dfrac{k\omega_0 t}{2}\right) \\ q_2(t) \simeq Q\sin(\omega_0 t)\sin\left(\dfrac{k\omega_0 t}{2}\right) \end{cases}}$

variation rapide

enveloppe



annulation de l'enveloppe lorsque $\dfrac{k\omega_0 t}{2} = \pi/2$, soit $t = \dfrac{\pi}{k\omega_0}$

annulation de la variation rapide lorsque $\omega_0 t = \pi/2$, soit $t = \dfrac{\pi}{2\omega_0} \ll \dfrac{\pi}{k\omega_0}$ car $k \ll 1$.

Ces courbes correspondent à des <u>battements</u> (cf 2 diapasons légèrement désaccordés vibrant en même temps).

On notera qu'il existe en pratique un amortissement des oscillations à cause de la résistance du circuit.