

# Magnétostatique

## Table des matières

<b>I Symétries et invariances du champ magnétostatique</b>	<b>1</b>
I.1 Force de Lorentz et conséquences sur la symétrie des champs . . . . .	1
I.2 Invariances par translation ou par rotation . . . . .	4
I.3 Exemple du fil infini . . . . .	4
<b>II Topographie du champ magnétostatique</b>	<b>5</b>
II.1 Lignes de champ . . . . .	5
II.2 Cartes de champ magnétostatique . . . . .	5
<b>III Propriétés de flux et de circulation du champ magnétostatique</b>	<b>7</b>
III.1 Flux du champ magnétique . . . . .	7
III.2 Circulation du champ magnétostatique - Théorème d'Ampère . . . . .	8
<b>IV Application au calcul du champ magnétostatique créé par quelques distributions de courant</b>	<b>9</b>
IV.1 Champ créé par un fil infini parcouru par un courant . . . . .	9
IV.2 Champ créé par un conducteur cylindrique parcouru par un courant uniforme . . . . .	9
IV.3 Champ créé par un solénoïde infini . . . . .	9
<b>V Action d'un champ magnétique permanent sur un conducteur</b>	<b>11</b>
V.1 Expérience : le rail de Laplace . . . . .	11
V.2 Effet Hall . . . . .	11
V.3 Force de Laplace . . . . .	12

## Introduction

On rappelle que les sources de champ magnétique peuvent être de deux sortes :

- un courant circulant dans un conducteur, dans lequel on définit le courant comme le débit de charge à travers la section du conducteur :  $I = \frac{dq}{dt}$ .  
Lors d'une répartition volumique des charges on définit le courant comme le flux du vecteur densité de courant  $\vec{j}$  à travers la section :  $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ .
- un aimant.

L'objet de ce chapitre est d'étudier les propriétés générales du champ magnétostatique puis le lien entre les courants électriques et le champ magnétique dans le cas statique, c'est à dire dans le cas où le courant est stationnaire (indépendant du temps). Nous verrons les propriétés des aimants dans le chapitre sur les dipôles.

## I Symétries et invariances du champ magnétostatique

### I.1 Force de Lorentz et conséquences sur la symétrie des champs

Si les propriétés du champ émis par une distribution de charge étaient faciles à visualiser sachant que le champ diverge des charges positives et converge vers les charges négatives, il n'est pas possible de raisonner aussi simplement pour le champ magnétostatique. Il faut ainsi revenir à la "cause" du champ :

- pour le champ  $\vec{E}$ , il s'agit de la partie électrique de la force de Lorentz :  $\vec{F} = q\vec{E}$
- pour le champ  $\vec{B}$ , il s'agit de la partie magnétique de la force de Lorentz :  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

Utilisons donc le principe de Curie pour déterminer les propriétés de symétrie des champs.

### a) Champ $\vec{E}$ :

Considérons une distribution de charge  $\mathcal{D}$  présentant un plan de symétrie  $\Pi_{sym}$ . On envisage de placer une charge  $q$  (positive par exemple sur la figure ci-dessous) en un point  $M$  ou en son symétrique  $M'$  par rapport à  $\Pi_{sym}$ . Cette charge, appelée *particule test*, est supposée suffisamment petite pour ne pas perturber<sup>1</sup> le champ électrique produit par la distribution de charge  $\mathcal{D}$ .

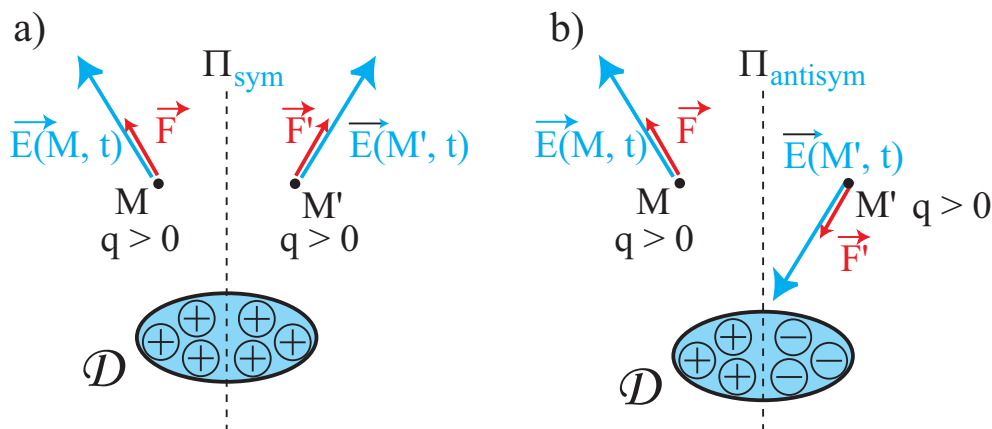


FIGURE 1: a) Cas d'une distribution de charge symétrique par rapport à un plan  $\Pi_{sym}$ . b) Cas d'une distribution de charge antisymétrique par rapport à un plan  $\Pi_{antisym}$ .

Les effets se traduisent non pas directement par le champ électrique, mais par la force de Lorentz, réduite ici à la force de Coulomb  $\vec{F} = q\vec{E}$ . En vertu du principe de Curie, la force  $\vec{F}$  appliquée en  $M$  doit présenter au moins la symétrie des causes, c'est à dire de la distribution de charges, et donc être la symétrique de  $\vec{F}'$  obtenue en  $M'$  par rapport à  $\Pi_{sym}$ .

On en déduit directement que :

$\vec{E}(M', t)$  est le symétrique de  $\vec{E}(M, t)$  par rapport à  $\Pi_{sym}$ .

On montrerait de même que dans le cas d'un plan d'antisymétrie  $\Pi_{antisym}$  de la distribution de charge<sup>2</sup> :  $\vec{E}(M', t)$  est le symétrique de  $-\vec{E}(M, t)$  par rapport à  $\Pi_{antisym}$ .

On retrouve donc le résultat énoncé au chapitre précédent :

### Propriété

**Un champ électrique possède au moins les propriétés d'invariance et de symétrie de la distribution qui le crée.**

### Remarque

|| Un tel vecteur qui a les mêmes propriétés de symétrie que les causes est appelé un vecteur *vrai* ou *polaire*. Le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est par exemple, au même titre que le champ électrostatique  $\vec{E}$ , un vecteur *vrai*.

1. Ceci permet de comprendre pourquoi  $q$  n'est pas incluse dans la distribution de charge globale; avoir deux charges symétriques dans la figure b) ne rompt donc pas l'antisymétrie globale des charges.

2. On rappelle qu'une antisymétrie vectorielle par rapport à un plan correspond à une symétrie plane puis à un changement de signe.

### b) Champ $\vec{B}$ :

Considérons maintenant une distribution de courant  $\mathcal{D}$  symétrique par rapport à un plan  $\Pi_{sym}$ . On envisage de placer en  $M$  une *particule test* de charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$ , ou en  $M'$  de même charge  $q$  et de même vitesse<sup>3</sup>  $\vec{v}$ .

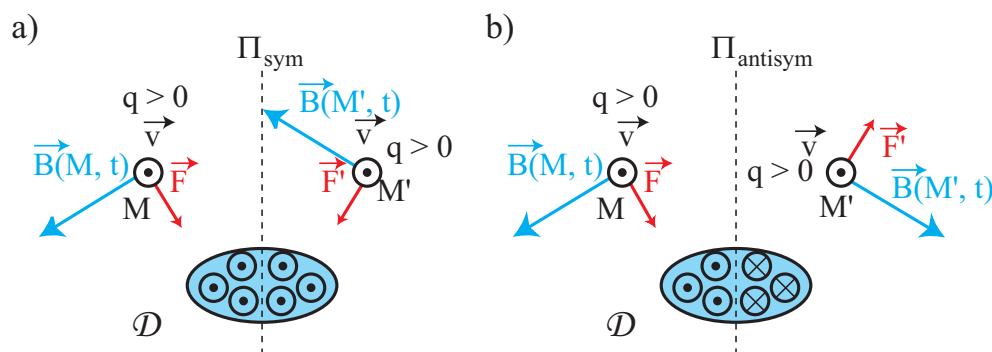


FIGURE 2: a) Cas d'une distribution de courant symétrique par rapport à un plan  $\Pi_{sym}$ . b) Cas d'une distribution de courant antisymétrique par rapport à un plan  $\Pi_{antisym}$ .

Puisque la distribution  $\mathcal{D}$  admet  $\Pi_{sym}$  comme plan de symétrie, la composante magnétique de la force de Lorentz doit nécessairement présenter la même symétrie. Du fait de l'existence du produit vectoriel, le champ magnétique  $\vec{B}$  est nécessairement antisymétrique par rapport à  $\Pi_{sym}$ , comme le montre la figure ci-dessus.

On en déduit directement que :

$\vec{B}(M', t)$  est le symétrique de  $-\vec{B}(M, t)$  par rapport à  $\Pi_{sym}$ .

On montrerait de même que dans le cas d'un plan d'antisymétrie  $\Pi_{antisym}$  de la distribution de charge<sup>4</sup> :

$\vec{B}(M', t)$  est le symétrique de  $\vec{B}(M, t)$  par rapport à  $\Pi_{antisym}$ .

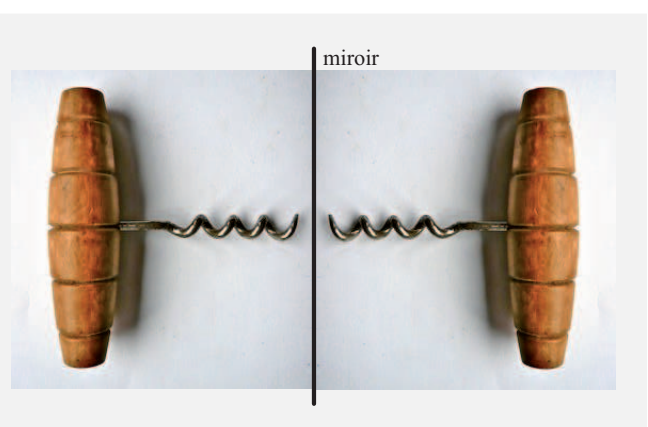
On retrouve donc le résultat énoncé en première année généralisé à un champ dépendant du temps :

### Propriété

Les propriétés de symétrie d'une distribution de courants se traduisent par des antisymétries sur le champ magnétique créé, et vice-versa.

### Remarque

Un tel vecteur qui a des propriétés de symétrie contraires à celles des causes est appelé un pseudo-vecteur ou vecteur axial. Ils ont les mêmes propriétés de symétrie qu'un tire-bouchon et sont définis à partir d'un produit vectoriel de deux vecteurs vrais (comme le moment cinétique par exemple).



3. On notera que, comme précédemment, la particule a une charge très faible et ne perturbe pas le champ magnétique global.  
4. On rappelle qu'une antisymétrie vectorielle par rapport à un plan correspond à une symétrie plane puis à un changement de signe.

### c) Cas particuliers

On rappelle que les propriétés de symétries précédentes permettent de remarquer que :

- si  $M \in \Pi_{sym}$ , plan de symétrie,  $\begin{cases} \vec{E}(M, t) \text{ appartient à } \Pi_{sym} \\ \vec{B}(M, t) \text{ est perpendiculaire à } \Pi_{sym} \end{cases}$
- si  $M \in \Pi_{antisym}$ , plan d'antisymétrie,  $\begin{cases} \vec{E}(M, t) \text{ est perpendiculaire à } \Pi_{antisym} \\ \vec{B}(M, t) \text{ appartient à } \Pi_{antisym} \end{cases}$

## I.2 Invariances par translation ou par rotation

### Propriété

**Si la distribution  $\mathcal{D}$  des courants présente une invariance par translation ou par rotation, le champ  $\vec{B}$  créé par  $\mathcal{D}$  sera également caractérisé par ces mêmes invariances.**

## I.3 Exemple du fil infini

Soit un fil rectiligne d'axe Oz infini traversé par un courant  $I$  ascendant. Soit un point  $M$  quelconque de l'espace, non placé sur le fil.

*Symétries :*

$(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie de la distribution de courants, donc  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire à ce plan, et  $\vec{B} \parallel \vec{u}_\theta$ , donc  $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_\theta$ . On notera que le champ magnétique s'enroule autour des courants.

On notera également que le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan d'antisymétrie de la distribution de courants, donc  $\vec{B}(M)$  appartient à ce plan, et  $\vec{B} \perp \vec{u}_z$ . Ce résultat est cohérent avec le précédent mais n'apporte pas plus d'information.

*Invariances :*

Le courant est invariant par translation le long de l'axe du fil et par rotation d'angle  $\theta$  autour de cet axe. Ainsi, le champ  $\vec{B}$  créé par ce courant ne dépendra ni de  $z$ , ni de  $\theta$  :  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$ .

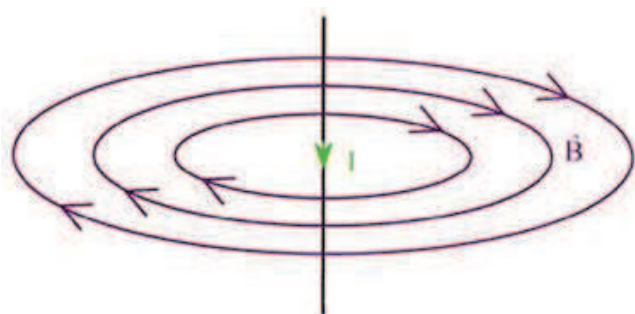
## II Topographie du champ magnétostatique

### II.1 Lignes de champ

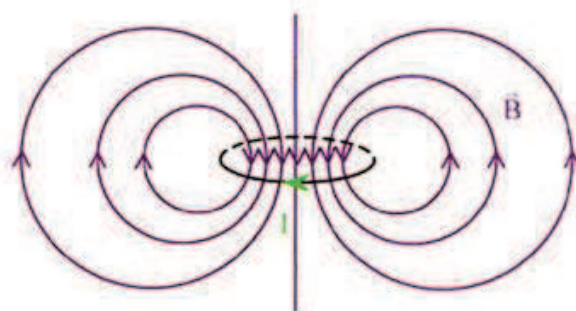
Tout comme le champ électrostatique, le champ magnétostatique est en tout point tangent à des lignes appelées lignes de champ. On peut facilement les visualiser expérimentalement en utilisant de la limaille de fer (le fer est ferromagnétique et s'aligne sur le champ magnétostatique local comme le ferait l'aiguille d'une boussole).

#### Propriété

- Les lignes de champ sont s'enroulent autour des courants et sont fermées. Cette propriété n'est pas vérifiée pour le champ électrostatique.
- Les lignes de champ sont orientées dans le sens positif par rapport au courant (règle de la main droite, du tire-bouchon de Maxwell ou du bonhomme d'Ampère).
- Les lignes de champ sont plus resserrées là où le champ magnétique est plus intense. Lorsque les lignes de champ sont parallèles, le champ est donc uniforme.



Lignes de champ d'un fil rectiligne.



Lignes de champ d'une spire circulaire.

### II.2 Cartes de champ magnétostatique

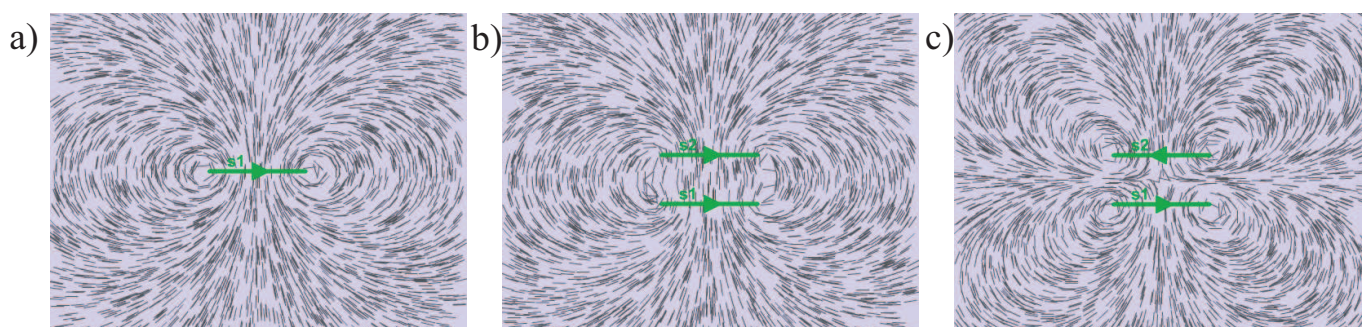


FIGURE 3: Champ magnétique créé par : a) une spire, b) deux bobines de Helmholtz, c) deux bobines parcourues par des courants inversés. Les lignes de champ magnétique visualisées ici sont analogues à celles qu'on pourrait observer avec de la limaille de fer.

#### a) Champ $\vec{B}$ créé par une spire

La figure a) ci-dessus montre la carte de champ magnétostatique créée par une spire de rayon  $a$  parcourue par un courant  $I$ . On constate bien, en accord avec les résultats précédents sur les invariances et les symétries :

- une invariance par rotation autour de l'axe perpendiculaire à la spire ;

- que les lignes de champ sont perpendiculaires au plan de la spire, lui-même plan de symétrie de la distribution de courant ;
- que le champ sur l'axe de la spire est parallèle à l'axe puisque tous les plans passant par cet axe sont plans d'antisymétrie de la distribution de courant.

Analogie d'une spire avec un aimant :

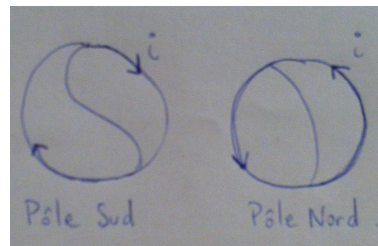


FIGURE 4: *Moyen mnémotechnique pour retrouver la polarité équivalente d'une spire parcourue par un courant.*

### b) Bobines de Helmholtz

La configuration de la figure b) correspondant à deux spires de rayon  $R$  parcourues par un même courant, dans le même sens, distantes de leur rayon  $R$  est appelée *configuration de Helmholtz*. Elle correspond au cas où le champ est quasi-uniforme entre les deux bobines. On peut vérifier les propriétés de symétries précédentes, avec toujours la présence de lignes de champ fermées.

### c) Bobines avec courants inversés

La configuration de la figure c) permet à nouveau de vérifier les propriétés de symétries précédentes, avec toujours la présence de lignes de champ fermées.

### d) Solénoïde

Un solénoïde d'axe  $z$  est une bobine de longueur infinie, parcourue par un courant  $I$ , comportant  $n = \frac{N}{\ell}$  spires par mètre.

Il y a invariance de la distribution de courants par rotation autour de  $z$  et par translation selon  $z$  de sorte que  $\vec{B}$  ne dépend que de  $r$ .

Tout plan passant par l'axe  $z$  est plan d'antisymétrie des courants, donc  $\vec{B}$  est selon  $\vec{u}_\theta$ , d'où :

$$\vec{B}_{\text{solénoïde}} = B(r)\vec{u}_\theta$$

D'après le logiciel de tracé des lignes de champ ([http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Elec/Champs/topoB.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Champs/topoB.php)), on voit que le champ créé par un grand nombre  $N$  de spires de même axe est :

- important et uniforme à l'intérieur du solénoïde
- quasiment nul à l'extérieur

Nous montrerons par la suite que le champ créé par un solénoïde infini parcouru par un courant  $I$ , comportant  $n = \frac{N}{\ell}$  spires par mètre est donné par :

- $B = \mu_0 n I$  à l'intérieur
- $B = 0$  à l'extérieur

*Ordres de grandeur* : pour une bobine typiquement utilisée en TP, au centre de la bobine, avec  $N = 1000$  spires,  $I = 0,1 \text{ A}$ ,  $\ell = 10 \text{ cm}$ ,

$$B \simeq \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 1000 \times 0,1}{10 \cdot 10^{-2}} \simeq 1 \text{ mT}$$



Cet ordre de grandeur intermédiaire est à mettre en parallèle avec le champ magnétique :

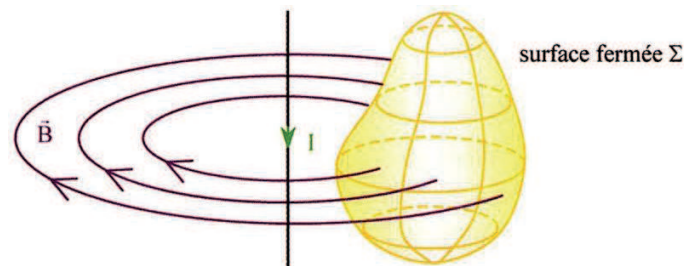
- créé par la Terre :  $B_{Terre} \simeq 50 \mu T$  (nous reviendrons sur son origine dans le chapitre sur les dipôles).
- créé par un IRM :  $B_{IRM} \simeq 6 T$ .

### III Propriétés de flux et de circulation du champ magnétostatique

#### III.1 Flux du champ magnétique

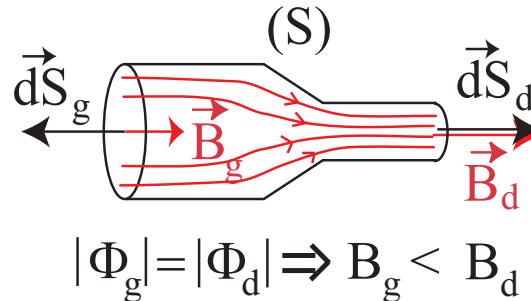
L'existence de lignes de champ fermées a une conséquence directe sur le flux du champ : toutes les lignes du champ qui entrent dans une surface doivent nécessairement en ressortir<sup>5</sup> :

$$\boxed{\Phi_{\vec{B}} = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0} \quad \text{Rappel : } \Phi_{\vec{E}} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



- Première conséquence : Conservation du flux de  $\vec{B}$  à travers un tube de champ

On appelle *tube de champ* toute surface fermée s'appuyant sur des lignes de champ, comme le montre la figure ci-dessous.



D'après ce qui précède :  $\Phi_{tot} = \Phi_{entrant} + \Phi_{latéral} + \Phi_{sortant} = 0$  car la surface totale du tube est fermée.

Or d'après la définition du tube de champ,  $\Phi_{latéral} = 0$ . De plus, d'après l'orientation des vecteurs surfaces entrant et sortant par rapport aux lignes de champ, le flux entrant  $\Phi_{entrant}$  est négatif alors que le flux sortant  $\Phi_{sortant}$  est positif. La nullité du champ total implique même :

$$\phi_{entrant} = \phi_{sortant} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \Phi_e = -\Phi_{gauche} \\ \Phi_s = -\Phi_{droit} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \phi_g = -\phi_d$$

On dit alors que le champ magnétique est à **flux conservatif**.

#### Propriété

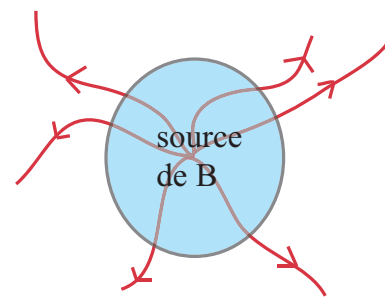
**Ceci a pour conséquence que le flux orienté dans le sens des lignes de champ est constant à travers un tube de champ (S), et donc que le champ est plus intense là où les lignes de champ se resserrent.**

5. On rappelle que ce n'est pas le cas pour le champ électrique, et que cette propriété est à l'origine de l'existence d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  pour le champ magnétique mais pas pour le champ électrique.

• Seconde conséquence : Non existence de monopole magnétique

Une autre conséquence est que les lignes de champ ne peuvent diverger localement autour d'un point source du champ  $\vec{B}$ , car cela serait en contradiction avec la nullité du flux de  $\vec{B}$  à travers toute surface fermée, comme le montre la figure ci-contre.

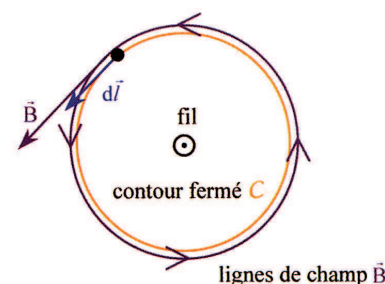
Ceci signifie qu'il ne peut exister de source de champ magnétique localisée en un point : il n'existe donc pas de **monopole magnétique**.



**III.2 Circulation du champ magnétostatique - Théorème d'Ampère**

La circulation du champ magnétostatique n'est pas nécessairement nulle sur un contour fermé. Pour nous en convaincre, il suffit de l'évaluer sur une ligne de champ qui enlace un fil parcouru par un courant. Le déplacement étant colinéaire au champ magnétique et de même direction en tout point, le produit scalaire entre ces deux vecteur est positif tout au long de la courbe fermée, donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} > 0 \quad \text{Rappel : } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$



• Conséquence : Théorème d'Ampère

On peut montrer que cette valeur ne dépend que des courants enlacés par le contour fermé<sup>6</sup> quel que soit le contour  $C$ . C'est ce qui constitue le théorème d'Ampère.

**Théorème d'Ampère**

La circulation du champ magnétostatique sur un contour fermé et orienté est proportionnelle aux courants enlacés :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_{\text{orienté}} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

où  $(C)$  est un contour fermé et orienté, et  $(S)$  une surface quelconque s'appuyant sur  $(C)$ , et orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle de la main droite.

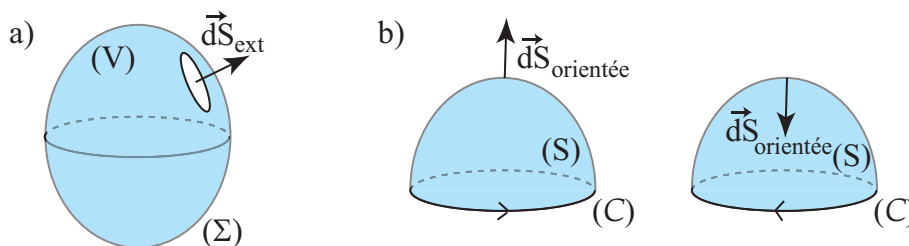


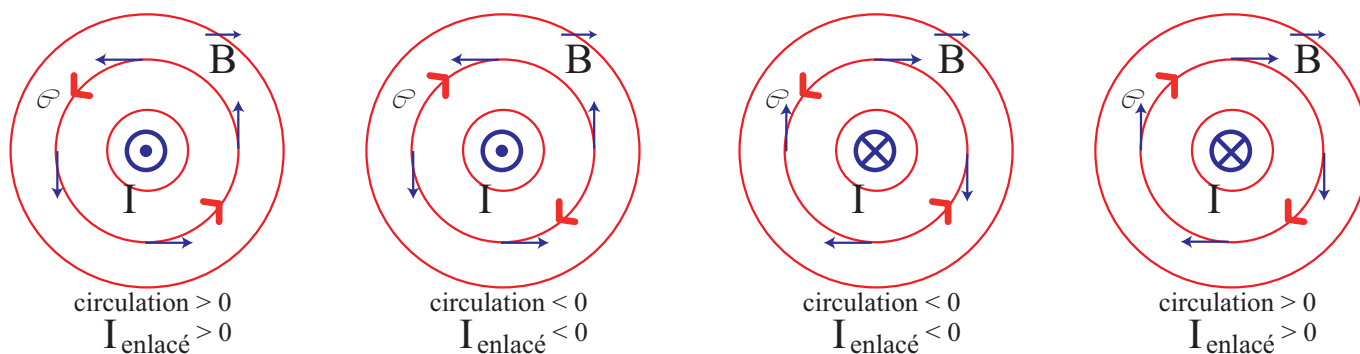
FIGURE 5: a) Par convention, pour une surface fermée, on oriente toujours le vecteur surface élémentaire  $d\vec{S}$  vers l'extérieur de celle-ci. b) En revanche, lorsque la surface considérée est ouverte, le sens de  $d\vec{S}$  dépend de la convention choisie - qu'il faut donc préciser !- et est orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell.

Revenons à nouveau sur l'exemple du champ créé par le fil infini. On voit ici que l'orientation du contour

6. On rappelle que par opposition, la circulation du champ électrique sur un contour fermé en régime stationnaire est toujours nulle. Une conséquence est qu'il n'existe pas de potentiel scalaire magnétostatique dont le champ serait le gradient.



$\mathcal{C}$  peut être quelconque et résulte d'un choix. Quelle que soit l'orientation du courant et l'orientation du contour, la règle imposée avec la main droite permet toujours d'obtenir des signes cohérents.



## IV Application au calcul du champ magnétostatique créé par quelques distributions de courant

### IV.1 Champ créé par un fil infini parcouru par un courant

A FAIRE

### IV.2 Champ créé par un conducteur cylindrique parcouru par un courant uniforme

On considère un cylindre infini d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$  parcouru par un courant  $I$  avec une densité volumique de courant  $\vec{j}$  uniforme dans la section du fil.

D'après les symétries du problème :  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$ .

En appliquant le théorème d'Ampère à un cercle de rayon  $r$  centré sur le fil et orienté selon le vecteur  $\vec{u}_\theta$ , on obtient :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{pour } r > R \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta & \text{pour } r < R \end{cases}$$

A l'extérieur, on retrouve le cas d'un fil infini d'axe  $Oz$  parcouru par un courant  $I$ , pour lequel on aurait négligé le rayon.

Attention, le signe du champ dépend de l'orientation du courant, mais pas du contour choisi !

On notera que le courant est continu en  $r = R$  car il n'existe pas de densité surfacique de courant.

### IV.3 Champ créé par un solénoïde infini

On considère solénoïde infini d'axe  $z$ , de rayon  $a$ , parcouru par un courant permanent  $I$  s'enroulant dans le sens positif par rapport à l'axe  $z$ , et possédant  $n$  spires par mètre.

Considérons un point  $M$  quelconque qui n'est pas nécessairement sur l'axe du solénoïde.

- Commençons par déterminer la direction du champ magnétique en  $M$  et les variables dont il dépend. D'après la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques d'axe  $z$ .

**Invariances** : La distribution étant invariante par rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $z$  et invariante par translation suivant l'axe  $z$  car le solénoïde est infini, donc on en déduit que le champ ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $z$ .

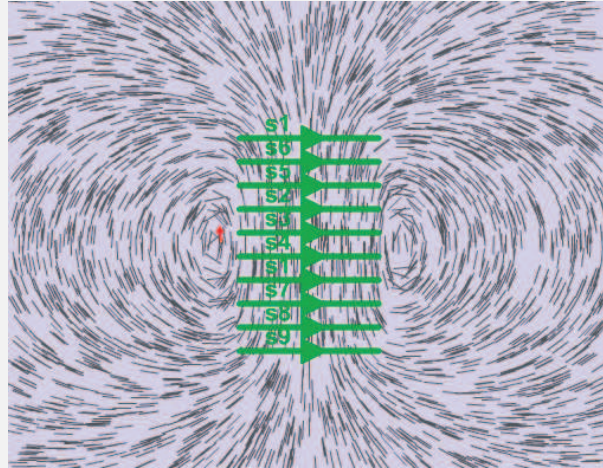
**Symétries** :

Le plan  $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  est un plan de symétrie, donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan, et il est donc colinéaire à  $\vec{u}_z$  en tout point de l'espace.

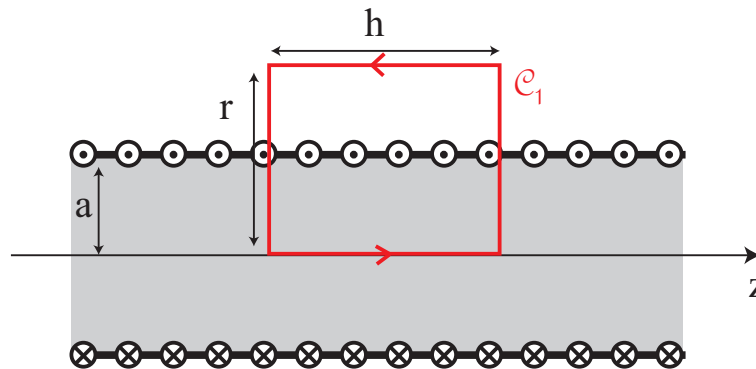
Finalemment :  $\vec{B} = B_z(r) \vec{u}_z$

Remarque

On remarque en utilisant le logiciel de tracé de cartes de champ magnétiques (<http://www.ac-grenoble.fr/disciplines/spc/genevieve-tulloue/file/gtulloue/Elec/Champs/topoB.html>), que le champ magnétostatique est quasiment nul à l'extérieur du solénoïde.



- Afin de déterminer la norme du champ magnétique, appliquons tout d'abord le théorème d'Ampère sur un premier contour  $C_1$  rectangulaire de hauteur  $h$ , à cheval sur la solénoïde et orienté comme sur la figure ci-dessous :



Pour  $r > a$  :  $\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_z(0)h - B_z(r > a)h = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = \mu_0 n h I$

Comme nous avons vu que le champ extérieur était nul, alors  $B_z(r > a) = 0$ . On en déduit que  $B_z(0) = \mu_0 n I$ .

Pour  $r < a$  :  $\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_z(0)h - B_z(r < a)h = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = 0$

On en déduit que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde et vaut  $\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{u}_z$ . donc  $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$ , et finalement :

$$\begin{cases} \vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{u}_z \\ \vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0} \end{cases}$$

Remarque

On remarque qu'il existe une discontinuité de  $\vec{B}$  au niveau de la surface du solénoïde. Cette discontinuité existe à chaque fois qu'il existe une nappe de courant (présence de courants surfaciques  $\vec{j}$  s.).

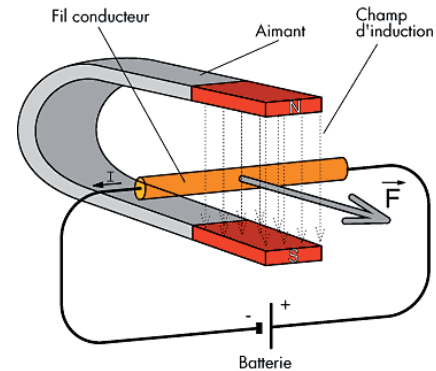
## V Action d'un champ magnétique permanent sur un conducteur

### V.1 Expérience : le rail de Laplace

On réalise l'expérience de la figure ci-contre :

- Avec  $I$ , mais sans  $\vec{B}$  (sans aimant) : la tige reste immobile.
- Sans  $I$  (interrupteur ouvert), mais avec  $\vec{B}$  : la tige reste immobile.
- Avec  $I$ , et avec  $\vec{B}$  : la tige se déplace, et le déplacement change de sens si on change le sens du courant ou du champ magnétique.

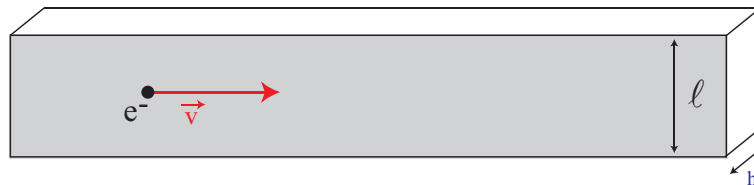
Quelle est l'origine de la force agissant sur le barreau ?



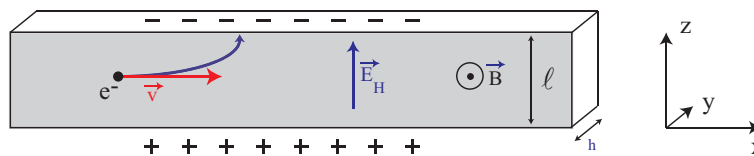
*Transition* : La seule interaction possible est de type électromagnétique, et la seule force possible est donc la force de Lorentz :  $\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]$ . Cependant, seul un champ magnétique est appliqué, et seuls les électrons sont en mouvement. Nous allons maintenant voir comment cette force qui agit seulement sur les électrons du barreau peut pourtant mettre en mouvement ce dernier.

### V.2 Effet Hall

Considérons un barreau conducteur de largeur  $\ell$  et d'épaisseur  $h$  parcouru par un courant. Sans la présence de champ magnétique, les électrons de conduction se déplacent selon l'axe du barreau comme le montre la figure ci-dessous.



Lorsqu'on applique un champ magnétique transversalement par rapport à l'axe du barreau conducteur, les électrons chargés négativement sont soumis à la force de Lorentz  $\vec{F}_B = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$  et vont donc venir se "coller" à la face du "haut" (schéma ci-dessous) du bandeau, en décrivant un arc de cercle.



La face du "haut" se charge donc négativement, et il apparaît une différence de potentiel entre les deux faces du bandeau. Cela se traduit donc par l'existence d'un champ électrique orienté dans le sens des potentiels décroissants, c'est à dire vers le "haut". Ce champ est appelé champ de Hall <sup>7</sup>  $\vec{E}_H$ .

Les électrons sont alors soumis à une nouvelle force  $\vec{F}_E = -e\vec{E}_H$  qui vient contrer l'effet du champ magnétique puisqu'elle est orientée vers le "bas". Il s'établit alors quasi-instantanément un équilibre entre les deux forces :

$$\vec{F}_B + \vec{F}_E = \vec{0} \quad \text{soit} \quad -e\vec{v} \wedge \vec{B} - e\vec{E}_H = \vec{0} \quad \text{et donc} \quad \vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = vB\vec{u}_z$$

7. Cet effet a été découvert par Hall en 1879.

Ce champ correspond à une différence de potentiel  $U_H$  entre les deux faces latérales du bandeau donnée par :

$$U_H = V_+ - V_- = \int_-^+ dV = \int_-^+ \overrightarrow{grad}V \cdot \overrightarrow{d\ell} = - \int_-^+ \underbrace{\overrightarrow{E}_H}_{E_H \vec{u}_z} \cdot \underbrace{\overrightarrow{d\ell}}_{-d\ell \vec{u}_z} = \ell E_H = \ell v B$$

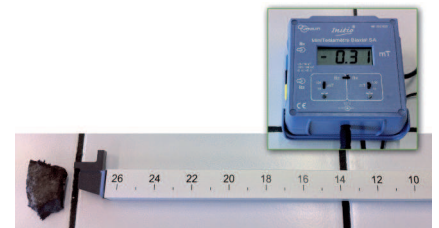
En supposant que la densité de courant  $\vec{j} = -n_e e \vec{v}$  est uniforme dans le conducteur, où  $n_e$  est la densité volumique d'électrons de conduction alors, en calculant le flux dans le sens de  $\vec{j}$ , c'est à dire dans le sens de  $-\vec{u}_x$  :

$$I = \iint_{\text{section}} \underbrace{\vec{j}}_{-n_e e v \vec{u}_x} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{-dS \vec{u}_x} = n_e e v l h \quad \text{d'où} \quad v = \frac{I}{h l n_e e}$$

En remplaçant  $v$  dans l'expression de  $U_H$ , on obtient :

$$U_H = \frac{IB}{n_e e l} \quad \text{Tension de Hall}$$

On notera que cette tension peut atteindre quelques volts et est donc tout à fait mesurable. C'est notamment ce qui est utilisé dans les **sondes à effet Hall** qui, par la mesure de  $U_H$ , permettent de remonter à la valeur de  $B$  connaissant tous les autres paramètres.



### Effet Hall

Lorsqu'un conducteur parcouru par un courant d'intensité  $I$  est soumis à un champ magnétique  $\vec{B}$  orthogonal au conducteur, il apparaît une différence de potentiel  $U_H$ , dans une direction orthogonale à la fois au conducteur et à  $\vec{B}$ .

### V.3 Force de Laplace

Revenons maintenant à l'action de la force de Lorentz sur l'ensemble du barreau, c'est à dire sur les charges *mobiles*, les électrons, de densité volumique de charge  $\rho_{\text{mobile}} = -en_e$ , mais également sur les charges *fixes*, les ions du réseau, de densité  $\rho_{\text{fixe}}$ . La force de Lorentz élémentaire  $d\vec{F}$  qui s'exerce sur un élément de volume  $d\tau$  du barreau conducteur s'écrit donc :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= d\vec{F}_{\text{mobile}} + d\vec{F}_{\text{fixe}} \\ &= \rho_{\text{mobile}} d\tau \left( \underbrace{\overrightarrow{E}_H + \vec{v} \wedge \overrightarrow{B}}_{=\vec{0} \text{ à l'éq.}} \right) + \rho_{\text{fixe}} d\tau \overrightarrow{E}_H \end{aligned}$$

D'après l'étude du champ de Hall  $\overrightarrow{E}_H$ , on sait qu'à l'équilibre

$$\overrightarrow{E}_H = -\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

D'autre part, le volume  $d\tau$  du matériau étant globalement neutre, on a

$$\rho_{\text{mobile}} d\tau + \rho_{\text{fixe}} d\tau = 0 \quad \text{soit} \quad \rho_{\text{fixe}} = -\rho_{\text{mobile}}$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} d\vec{F}_{\text{mobile}} = \vec{0} \\ d\vec{F}_{\text{fixe}} = -\rho_{\text{mobile}} d\tau (-\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}) = \underbrace{\rho_{\text{mobile}} \vec{v}}_{=\vec{j}} \wedge \overrightarrow{B} d\tau \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{d\vec{F} = \vec{j} \wedge \overrightarrow{B} d\tau}.$$

D'après le raisonnement précédent, on constate que la résultante des forces de Lorentz, appelée **force de Laplace**, résulte de l'action du champ de Hall sur le réseau cristallin du conducteur. Les porteurs de charge, quant à eux, sont soumis à deux forces qui se compensent : l'action du champ de Hall et la force magnétique.

## Force de Laplace

La force élémentaire de Laplace exercée sur un volume  $d\tau$  de conducteur, soumis au champ magnétique  $\vec{B}$ , a pour expression

$$d\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

où  $\vec{j}$  est la densité volumique de courant.

Pour un conducteur filiforme,  $\vec{j} d\tau \rightarrow I d\vec{\ell}$ . On en déduit l'expression de la force élémentaire de Laplace exercée sur un élément de courant  $I d\vec{\ell}$  :

$$d\vec{F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

### Remarque

|| C'est cette force qui permet d'expliquer le mouvement du barreau dans l'expérience du rail de Laplace.

## Conclusion

Comparaison entre électrostatique et magnétostatique.

	<b>Electrostatique</b>	<b>Magnétostatique</b>
<b>Distributions</b>	charge ponctuelle : $q$ densité lin. de charge : $\lambda$ densité surfacique de charge : $\sigma$ densité volumique de charge : $\rho$	monopôle magnétique n'existe pas (densité linéique de) courant : $I$ densité surf. de courant : $\vec{j}_s$ (H.P.) densité vol. de courant : $\vec{j}$
<b>Force exercée sur une distribution élémentaire</b>	charge ponctuelle : $d\vec{F} = dq\vec{E}$ densité lin. de charge : $d\vec{F} = \lambda d\ell \vec{E}$ densité surf. de charge : $d\vec{F} = \sigma dS \vec{E}$ densité vol. de charge : $d\vec{F} = \rho d\tau \vec{E}$ ( <b>Force de Coulomb</b> )	charge ponctuelle : $d\vec{F} = dq \vec{v} \wedge \vec{B}$ densité lin. de courant : $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ densité surf. de courant : $d\vec{F} = \vec{j}_s dS \wedge \vec{B}$ densité vol. de courant : $d\vec{F} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$ ( <b>Force de Lorentz ou Laplace</b> )
<b>Champ créé par une distribution élémentaire</b>	$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$ (Loi de Coulomb)	$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 Id\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{4\pi PM^3}$ (Loi de Biot et Savart)
<b>Propriétés de symétrie</b>	$\vec{E}$ : vecteur vrai ou polaire $\vec{E} \in \Pi_{sym}$ $\vec{E} \perp \Pi_{antisym}$	$\vec{B}$ : pseudo-vecteur ou vecteur axial $\vec{B} \perp \Pi_{sym}$ $\vec{B} \in \Pi_{antisym}$
<b>Circulation sur un contour fermé</b>	$\mathcal{C} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ Cette expression est fautive en régime variable $\vec{E}$ est à circulation conservative	$\mathcal{C} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlacé}$ Cette expression est fautive en régime variable <p style="text-align: center;"><b>Théorème d'Ampère</b> Orientation : règle de la main droite</p>
<b>Flux à travers une surface fermée</b>	$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ Théorème de Gauss	$\Phi = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ $\vec{B}$ est à flux conservatif
<b>Potentiel</b>	Potentiel électrostatique $V$ $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ Cette expression est fautive en régime variable	Potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$ (H.P.)
<b>Continuités</b>	$V$ est toujours continu $\vec{E}$ discontinu uniquement si $\exists \sigma$	$\vec{A}$ est toujours continu (H.P.) $\vec{B}$ discontinu uniquement si $\exists \vec{j}_s$