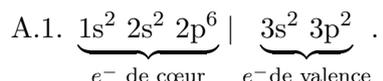


MP2 - Correction - DS 3bis (Centrale - Mines)

1 Chimie

Partie 1 : ATOMISTIQUE et CRISTALLOGRAPHIE

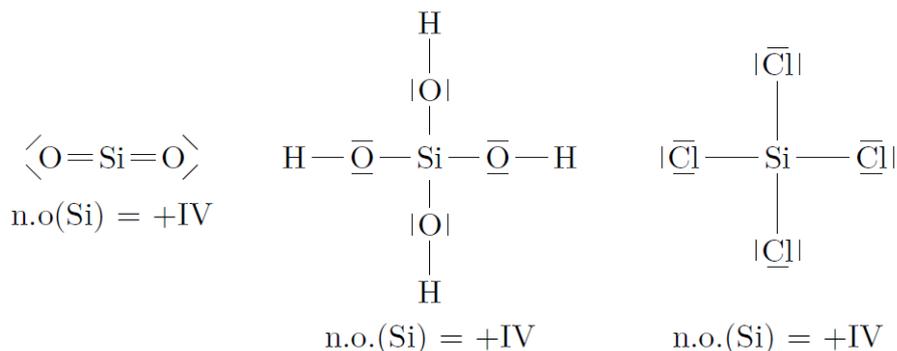
A. Structure du silicium



Rappelons que les électrons de cœur sont ceux qui ne sont pas des électrons de valence.

A.2. La valeur maximale du nombre quantique principal est $n = 3$: 3^{ème} période; Il y a 4 électrons de valence, donc : $10 + 4 = 14^{\text{ème}}$ colonne du tableau périodique. Le carbone C a aussi 4 électrons de valence. C est plus électronégatif car il est situé au dessus de Si (dans la 2^{ème} période). On sait que l'électro-négativité augmente de bas en haut et de la gauche vers la droite du tableau.

A.3. Le silicium est tétravalent, ce qui conduit aux composés suivants :



Aucun élément ne possède de charge formelle. La première formule de Lewis est d'ailleurs obtenue en utilisant deux liaisons doubles, ce qui annule les charges formelles aussi bien sur l'oxygène que sur le silicium : le composé en est d'autant plus stable.

Pour calculer le nombre d'oxydation de Si, rappelons qu'on attribue tous les électrons de liaison à l'élément le plus électronégatif, c'est à dire O ou Cl ici. Dans les trois composés, Si a perdu tous ses électrons de valence (= 4), d'où : n.o.(Si) = +IV.

B. Cristallographie du silicium et du nitrure de silicium

B.1. Site T : $N_T = 8$ et sites O : $N_O = 1 + 12/4 = 4$

B.2. La population de Si sera : $N(\text{Si}) = \underbrace{8/8}_{\text{sommets}} + \underbrace{6/2}_{\text{faces}} + \underbrace{4}_{\text{sites T}} = 8$ atomes par maille cubique.

Un atome de Silicium aura une coordinence de 4 (c'est à dire 4 plus proches voisins) qui correspond à celle d'un atome dans un site T.

B.3. Les atomes sont en contact sur la grande diagonale d'un cube de coté $a/2$ (on le voit à partir d'un site T) :

$$2r(\text{Si}) = \sqrt{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \implies r(\text{Si}) = \frac{\sqrt{3}a}{8}$$

B.4.

$$\rho = \frac{\text{masse des atomes}}{\text{volume de la maille}} = \frac{8 M(\text{Si})}{N_A a^3} = \frac{3\sqrt{3} M(\text{Si})}{8^2 N_A r(\text{Si})^3}$$

et donc :

$$r(\text{Si}) = \left(\frac{3\sqrt{3} M(\text{Si})}{8^2 N_A \rho} \right)^{1/3} \approx 118 \text{ pm}$$

B.5.

$$C = \frac{\text{volume des atomes}}{\text{volume de la maille}} = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi r(\text{Si})^3}{a^3} = \frac{8 \times 4\pi \times 3\sqrt{3}}{3 \times 8^3}$$

et donc

$$C = \frac{\sqrt{3}\pi}{16} = 0,34$$

C'est une valeur bien inférieure à la compacité maximale que l'on peut obtenir avec une structure cfc (0,74).

B.6. Le silicium est matériau très dur car les atomes de Si sont liés par des liaisons covalentes.

B.7. On parle de variétés allotropiques.

$$\text{B.8. Nombre de Si}^{4+} \text{ par maille cubique : } \underbrace{\frac{8}{8}}_{\text{sites T}} + \underbrace{\frac{1 + 12/4}{2}}_{\text{sites O}} = 3.$$

Nombre de N^{3-} par maille : 4 (structure cfc)La stœchiométrie Si_3N_4 est donc respectée.

B.9. Soit r_T le rayon du plus grand cation que l'on peut insérer dans un site T (= habitabilité du site). Ce cation est alors en contact avec un N^{3-} le long de la grande diagonale d'un cube d'arête $a/2$, d'où :

$$r_T + r(\text{N}^{3-}) = \sqrt{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \iff a = \frac{4}{\sqrt{3}} (r(\text{N}^{3-}) + r_T)$$

D'autre part, si les anions sont en contact le long de la diagonale d'une face du grand cube :

$$4r(\text{N}^{3-}) = \sqrt{2} a \iff a = \frac{4r(\text{N}^{3-})}{\sqrt{2}}$$

d'où :

$$r_T = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r(\text{N}^{3-}) = 31,4 \text{ pm}$$

Ceci est cohérent avec les atomes de Si qui sont dans les sites T (coordination 4) : $r(\text{Si}) = 27 \text{ pm} < r_T$.

B.10. Il s'agit d'une liaison ionique : liaison forte car la différence d'électro-négativité est importante. Ce solide doit posséder une température de fusion élevée (une recherche sur internet fournit 1900°C).

Partie 2 : CINÉTIQUE CHIMIQUE

1.

$$v = - \frac{d[\text{RBr}]}{dt} = - \frac{d[\text{I}^-]}{dt} = \frac{d[\text{RI}]}{dt} = \frac{d[\text{Br}^-]}{dt}$$

Si, de plus, la réaction admet un ordre par rapport à chaque réactif, on peut écrire :

$$v = k[\text{RBr}]^\alpha [\text{I}^-]^\beta$$

où α et β sont les ordres partiels par rapport à RBr et à I^- .

2. a) $\frac{[\text{RBr}]_0}{[\text{I}^-]_0} = 21$. RBr étant en large excès par rapport à I^- , on peut supposer que sa concentration ne va pas beaucoup varier au cours de la transformation chimique. Il y a donc dégénérescence de l'ordre par rapport à RBr.

$$[\text{RBr}] \approx [\text{RBr}]_0 \implies v \approx \underbrace{k([\text{RBr}]_0)^\alpha}_{\text{constante}} [\text{I}^-]^\beta = k_{app} [\text{I}^-]^\beta$$

où k_{app} est la constante de vitesse apparente :

$$k_{app} = k([\text{RBr}]_0)^\alpha$$

- b) Dans le cas où $\beta = 1$:

$$-\frac{d[\text{I}^-]}{dt} = k_{app}[\text{I}^-] \implies [\text{I}^-] = [\text{I}^-]_0 \exp(-k_{app}t) \quad \text{donc} \quad \ln[\text{I}^-] = \ln[\text{I}^-]_0 - k_{app}t$$

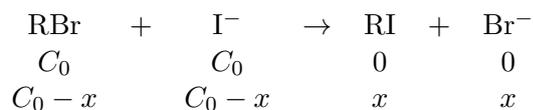
Une régression linéaire sur les couples $(t, \ln[\text{I}^-])$ conduit à un coefficient de corrélation : $|r| = 0,99999891$ ce qui confirme l'hypothèse $\beta = 1$.

- c) Le calcul de régression linéaire précédent donne la pente de la droite $\ln[\text{I}^-] = f(t)$ qui vaut $-k_{app}$. On en déduit que :

$$k_{app} = 0,266 \text{ h}^{-1} = 7,39 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

3. Dans cette partie les concentrations initiales sont égales et nous poserons : $[\text{RBr}]_0 = [\text{I}^-]_0 = C_0$.

- a) Un tableau d'avancement donne (en concentration) :



où x est l'avancement volumique.

D'autre part :

$$\tau = \frac{n_{\text{RBr}}(0) - n_{\text{RBr}}(t)}{n_{\text{RBr}}(0)} \implies n_{\text{RBr}}(t) = n_{\text{RBr}}(0)(1 - \tau)$$

En divisant par le volume V de la solution, nous obtenons :

$$[\text{RBr}] = [\text{I}^-] = C_0(1 - \tau) \tag{1}$$

- b) La vitesse v de la réaction s'écrit désormais :

$$v = k[\text{RBr}]^\alpha [\text{I}^-] = k[\text{RBr}]^{1+\alpha} = -\frac{d[\text{RBr}]}{dt}$$

ce qui conduit à une équation différentielle à variables séparables dont la solution s'écrit :

$$\int_{C_0}^{[\text{RBr}]} \frac{d[\text{RBr}]}{[\text{RBr}]^{1+\alpha}} = - \int_0^t k dt = -kt$$

Si $\alpha \neq 0$, cela conduit à :

$$\boxed{-\frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{[\text{RBr}]^\alpha} \right]_{C_0}^{[\text{RBr}]} = -kt \quad \text{donc} \quad \frac{1}{[\text{RBr}]^\alpha} = \frac{1}{C_0^\alpha} + \alpha kt}$$

et si $\alpha = 0$, cela donne :

$$\boxed{\ln[\text{RBr}] = \ln C_0 - kt}$$

La relation (1) permet de construire le tableau ci-dessous :

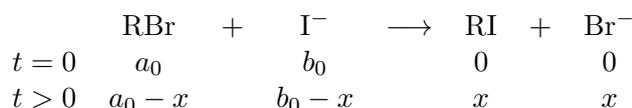
t (en h)	0	0,5	1	2	4	8	12
[RBr] (mol.L ⁻¹)	4,20.10 ⁻³	3,72.10 ⁻³	3,34.10 ⁻³	2,77.10 ⁻³	2,07.10 ⁻³	1,37.10 ⁻³	1,03.10 ⁻³

- Pour $\alpha = 0$, une régression linéaire sur les couples $(t, \ln[\text{RBr}])$ conduit à un coefficient de corrélation $|r| = 0,984 < 0,999$. α **n'est donc pas égal à 0**.
 - Pour $\alpha = 1$, une régression linéaire sur les couples $(t, 1/[\text{RBr}])$ conduit à un coefficient de corrélation $|r| = 0,999\ 993 > 0,99$ **ce qui confirme que $\alpha = 1$** . On peut remarquer que cela signifie que la loi de vitesse suit ici la loi de Van't Hoff, et qu'il s'agit peut-être d'un acte élémentaire.
- c) D'après l'étude précédente, le coefficient directeur de la droite $1/[\text{RBr}] = f(t)$ est k . On en déduit :

$$\boxed{k = 61,2 \text{ L.mol}^{-1}.\text{h}^{-1} = 1,70.10^{-2} \text{ L.mol}^{-1}.\text{s}^{-1}}$$

4. On utilise le **tableau III**.

- a) Déterminons la loi d'évolution des concentrations en fonction du temps. En posant $[\text{RBr}]_0 = a_0$ et $[\text{I}^-]_0 = b_0$, le tableau d'avancement s'écrit (en utilisant les concentrations et l'avancement volumique x) :



Par définition de la vitesse de réaction v :

$$v = -\frac{d[\text{RBr}]}{dt} = \frac{dx}{dt} = k [\text{RBr}][\text{I}^-] = k(a_0 - x)(b_0 - x)$$

avec $k = k(323\text{K})$. Cette équation différentielle à variables séparables se résout en :

$$\int_0^x \frac{dx'}{(a_0 - x')(b_0 - x')} = \int_0^t k dt' = kt$$

et donc :

$$\int_0^x \frac{dx'}{a_0 - x'} - \int_0^x \frac{dx'}{b_0 - x'} = (b_0 - a_0)kt$$

d'où :

$$\boxed{\ln \left[\frac{(b_0 - x)a_0}{(a_0 - x)b_0} \right] = (b_0 - a_0)kt}$$

- b) Dans cet expérience, le réactif limitant est RBr et le temps de demi-réaction est défini pour $x = a_0/2$, ce qui conduit à :

$$k = \frac{1}{(b_0 - a_0)t_{1/2}} \ln \left[\frac{(2b_0 - a_0)}{b_0} \right]$$

Application numérique : $k(323\text{K}) = 6,9 \cdot 10^{-5} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

- c) Pour cette deuxième expérience à $T = 353 \text{ K}$, les deux concentrations initiales sont égales. En posant $[\text{RBr}]_0 = [\text{I}^-]_0 = a_0$, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = k' (a_0 - x)^2$$

avec $k' = k(353\text{K})$. Cette équation se résout en écrivant :

$$\int_0^x \frac{dx'}{(x' - a_0)^2} = \int_0^t k' dt' = k't \iff -\frac{1}{x - a_0} - \frac{1}{a_0} = k't$$

Pour $t = t_{1/2}$, $x = a_0/2$ et donc $k't_{1/2} = \frac{1}{a_0}$, d'où :

$$k' = \frac{1}{a_0 t_{1/2}}$$

Application numérique : $k(353\text{K}) = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

- d) D'après la loi d'Arrhénius, l'énergie d'activation E_a est liée à la constante de vitesse k par l'équation :

$$\frac{d \ln k}{dT} = \frac{E_a}{RT^2} \implies \ln k(T) = -\frac{E_a}{RT} + K$$

où K est une constante. En posant $T_1 = 323\text{K}$ et $T_2 = 353\text{K}$, nous obtenons par différence :

$$\ln k' - \ln k = -\frac{E_a}{RT_2} + \frac{E_a}{RT_1} \iff \ln \left(\frac{k'}{k} \right) = \frac{E_a}{R} \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}$$

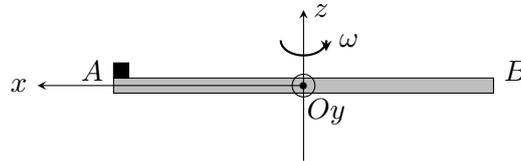
soit :

$$E_a = \frac{RT_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \left(\frac{k'}{k} \right)$$

Application numérique : $E_a = 1,2 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \approx 120 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, ce qui est un bon ordre de grandeur.

2 Glissement d'une gomme sur une barre en mouvement

I. L'axe de rotation de la barre est vertical



- 1) Étudions la gomme de masse m dans le référentiel de la barre (\mathcal{R}_b) non galiléen et muni du repère d'espace $(Oxyz)$. En l'absence de glissement, la gomme est immobile dans ce référentiel.

Bilan des forces (BDF) :

- Poids : $m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$
- Réaction normale exercée par la barre : $\vec{N} = N \vec{e}_z$
- Réaction tangentielle exercée par la barre $\vec{T} = T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y$

Il faut faire attention au fait que \vec{T} est dans le plan tangent au support et possède donc ici deux composantes T_x et T_y .

- Force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 L \vec{e}_x$ (on néglige l'épaisseur de la barre et la gomme est supposée ponctuelle)
- La force d'inertie de Coriolis est nulle puisque la gomme est immobile dans (\mathcal{R}_b) .

Principe fondamental de la dynamique (PFD) projeté dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{0} = -mg \vec{e}_z + T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y + N \vec{e}_z + m\omega^2 L \vec{e}_x$$

d'où :

$$\begin{cases} T_x = -m\omega^2 L \\ T_y = 0 \\ N = mg \end{cases}$$

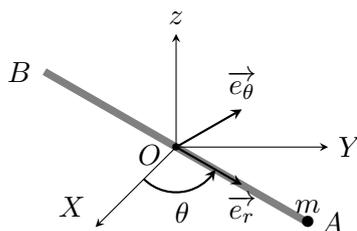
L'absence de glissement ne peut persister que si :

$$\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} < f_s \iff \frac{\omega^2 L}{g} < f_s \text{ d'où } \omega < \sqrt{\frac{f_s g}{L}}$$

On a donc :

$$\omega_m = \sqrt{\frac{f_s g}{L}} \stackrel{AN}{=} 2 \text{ rad.s}^{-1} = 0,3 \text{ tour.s}^{-1}$$

2) On reprend la figure du texte :



- a) Étudions le système { barre + gomme } dans le référentiel terrestre (\mathcal{R}_T) supposé galiléen. Il est intéressant d'introduire la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ (qui est d'ailleurs confondue avec \vec{e}_x et \vec{e}_y) pour projeter les relations vectorielles.

Le moment cinétique du système { barre + gomme } est la somme des moments cinétiques :

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O(\text{barre}) + \vec{L}_O(\text{gomme})$$

avec $\vec{L}_O(\text{barre}) \cdot \vec{e}_z = J\dot{\theta}$ et :

$$\vec{L}_O(\text{gomme}) = \vec{OA} \wedge m \vec{v}_{A/\mathcal{R}_T} = L \vec{e}_r \wedge mL\dot{\theta} \vec{e}_\theta = mL^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{L}_O \cdot \vec{e}_z = (J + mL^2) \dot{\theta}}$$

Remarque :

On aurait pu écrire ce résultat directement en remarquant que le système { barre + gomme } forme un solide en rotation autour de l'axe fixe Oz et dont le moment d'inertie par rapport à Oz est égal à $J + mL^2$.

BDF externes appliquées au système :

- Liaison pivot parfaite : $\overrightarrow{M}_O(\text{pivot}) \perp \vec{e}_z$
- Poids de la barre : $\overrightarrow{M}_O(\text{poids barre}) = (\overrightarrow{OG}_b \wedge M \vec{g}) \perp \vec{e}_z$
- Poids de la gomme : $\overrightarrow{M}_O(\text{poids gomme}) = (\overrightarrow{OA} \wedge M \vec{g}) \perp \vec{e}_z$.
- Moment exercé par le ressort spiral : $\overrightarrow{M}_O(\text{rs}) = -C \theta \vec{e}_z$

On applique le théorème du moment cinétique (TMC) en projection sur \vec{e}_z

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} = -C \theta \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3C}{(M + 3m)L^2} \theta = 0}$$

Il s'agit d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\Omega = \sqrt{\frac{3C}{(M+3m)L^2}}$. On a donc :

$$\theta(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$$

et les conditions initiales entraînent : $A = \theta_0$ et $B = 0$ d'où :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega t)}$$

- b) Étudions la gomme dans le référentiel de la barre (\mathcal{R}_b) non galiléen. Celui-ci est en rotation **non uniforme** autour de l'axe Oz (fixe dans \mathcal{R}_T) avec un vecteur rotation $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$.

BDF :

- Le poids $-mg \vec{e}_z$
- La réaction normale de la barre $\vec{N} = N \vec{e}_z$
- La réaction tangentielle de la barre $\vec{T} = T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y$
- La force d'inertie d'entraînement :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ie} &= -m \vec{a}_e = -m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OA} - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}) \\ &= -m \ddot{\theta} \vec{e}_z \wedge L \vec{e}_x + m \dot{\theta}^2 L \vec{e}_x \\ &= -mL \ddot{\theta} \vec{e}_y + m \dot{\theta}^2 L \vec{e}_x \end{aligned}$$

- La force d'inertie de Coriolis est toujours nulle puisque la gomme est immobile dans (\mathcal{R}_b).

PDF projeté sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\begin{cases} T_x &= -mL \dot{\theta}^2 = -mL\Omega^2 \theta_0^2 \sin^2(\Omega t) \\ T_y &= mL \ddot{\theta} = -mL\Omega^2 \theta_0 \cos(\Omega t) \\ N &= mg \end{cases}$$

- c) On pose $y = \sin^2(\Omega t)$. Étudier $\|\vec{T}\|$ en fonction de y . En déduire que la masse m reste posée sans glisser sur la barre si :

$$\theta_0 < \begin{cases} \frac{f_s g}{L\Omega^2} & \text{lorsque } \frac{f_s g}{L\Omega^2} < 1 \\ \sqrt{\frac{f_s g}{L\Omega^2}} & \text{lorsque } \frac{f_s g}{L\Omega^2} > 1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\|\vec{T}\| = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = mL\Omega^2 \theta_0 \sqrt{\theta_0^2 \sin^4(\Omega t) + \cos^2(\Omega t)} = mL\Omega^2 \theta_0 \sqrt{\theta_0^2 y^2 - y + 1}$$

Comme les variations de $\|\vec{T}\|$ sont celles de la fonction $f : y \mapsto \theta_0^2 y^2 - y + 1$, nous allons étudier f qui est définie sur l'intervalle $[0, 1]$. Nous avons :

$$\forall y \in [0, 1], f'(y) = 2\theta_0^2 y - 1$$

Le tableau des variations de f s'écrit :

y	0	$\frac{1}{2\theta_0^2}$	1
$f'(y)$	-	0	+
$f(y)$	1	\swarrow ↘ θ_0^2 $1 - \frac{1}{4\theta_0^2}$	

On veut que la gomme reste toujours sans glisser sur la barre, c'est à dire pour tout t et donc pour tout $y \in [0, 1]$. On peut formaliser cela de la façon suivante :

$$\forall y \in [0, 1], \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} < f_s \iff \theta_0 \sqrt{f(y)} < \frac{f_s g}{L\Omega^2}$$

Ceci sera réalisé si et seulement si :

$$\theta_0 \max_{y \in [0, 1]} \sqrt{f(y)} < \frac{f_s g}{L\Omega^2}$$

Or :

$$\theta_0 \max_{y \in [0, 1]} \sqrt{f(y)} = \theta_0 \max(1, \theta_0) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\theta_0 \max(1, \theta_0) < \frac{f_s g}{L\Omega^2}} \quad (*)$$

Il s'ensuit la discussion suivante :

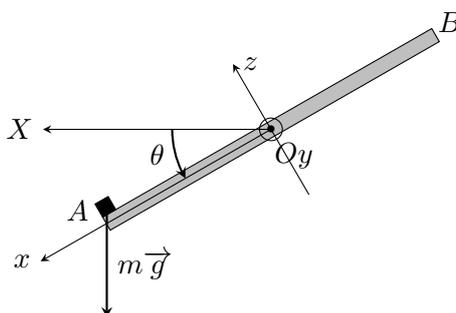
- Si $\theta_0 < 1$ alors (*) implique que la gomme ne glisse pas si $\theta_0 < \frac{f_s g}{m\Omega^2}$.
- Si $1 < \theta_0$ alors la gomme ne glisse pas si $\theta_0 < \sqrt{\frac{f_s g}{L\Omega^2}}$, ce qui n'est possible que si $1 < \frac{f_s g}{L\Omega^2}$.

Application numérique : $\Omega = 1,17 \text{ rad.s}^{-1} \implies \frac{f_s g}{L\Omega^2} = 3,37$. On en déduit que l'angle initial maximum est :

$$\theta_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{f_s g}{L\Omega^2}} = 1,69 \text{ rad} = 97^\circ$$

II. L'axe de rotation de la barre est horizontal

La barre est maintenant en rotation autour de l'axe horizontal Oy fixe dans le référentiel terrestre (la liaison pivot sera encore supposée parfaite), la rotation étant repérée par l'angle θ entre OX et AB , OX étant un axe fixe dans (\mathcal{R}_T) .



- 1) a) On applique le TMC au système { barre + gomme } dans le référentiel terrestre (\mathcal{R}_T) galiléen. Le système étant immobile, la somme des moments des forces **extérieures** par rapport à Oy (axe de rotation) est nulle. On travaille dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (base de projection). Ces moments sont :

- $-C\theta \vec{e}_y$
- Le moment du poids de A :

$$\vec{OA} \wedge m\vec{g} = L\vec{e}_x \wedge mg(-\cos\theta \vec{e}_z + \sin\theta \vec{e}_x) = mgL \cos\theta \vec{e}_y$$

- Les moment du poids de la barre et de la liaison pivot sont nuls.

Projetons sur \vec{e}_y :

$$-C\theta_{eq} + mgL \cos\theta_{eq} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\cos\theta_{eq} = \frac{C}{mgL} \theta_{eq}}$$

- b) Le système précédent étant en équilibre dans le référentiel terrestre, la gomme est elle aussi immobile : la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle. Or la gomme est soumise à :

- La réaction normale de la barre : $\vec{N} = N \vec{e}_z$
- La réaction tangentielle de la barre $\vec{T} = T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y$
- Le poids : $m\vec{g} = mg(-\cos\theta_{eq} \vec{e}_z + \sin\theta_{eq} \vec{e}_x)$

De $\vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} = \vec{0}$ on tire :

$$\begin{cases} T_x = -mg \sin\theta_{eq} \\ T_y = 0 \\ N = mg \cos\theta_{eq} \end{cases}$$

c) La gomme ne glisse pas si :

$$\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} < f_s \iff \boxed{\tan \theta_{eq} < f_s \text{ donc } \theta_{eq} < \arctan f_s}$$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve : $\theta_{eq} < 11,3^\circ$

On résout ensuite à l'aide de la calculatrice l'équation :

$$\cos \theta_{eq} = \frac{0,2}{(10 \cdot 10^{-3}) \times 9,81 \times 0,5} \theta_{eq} = 4,08 \theta_{eq}$$

et on trouve : $\theta_{eq} = 0,238 \text{ rad} = 13^\circ$

Le ressort spiral étudié n'est donc pas suffisant pour maintenir m sur la barre.

2) Résolution de problème :

On commence par appliquer le PFD à la gomme en supposant que celle-ci ne glisse pas. Pour changer, faisons-le dans le référentiel terrestre (\mathcal{R}_T) galiléen mais en travaillant dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{OA} = L \vec{e}_x ; \quad \vec{v}_{A/\mathcal{R}_T} = L \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{\mathcal{R}_T} = -L\dot{\theta} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{a}_{A/\mathcal{R}_T} = -L\ddot{\theta} \vec{e}_z - L\dot{\theta}^2 \vec{e}_x$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 &= T_x + mg \sin \theta \\ 0 &= T_y \\ -mL\ddot{\theta} &= -mg \cos \theta + N \end{cases}$$

Il faut donc déterminer $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$. Pour cela on peut appliquer le TMC au système { barre + gomme }. Une démarche analogue à celle de la question de la question 1) a) conduit à l'équation :

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} = mgL \cos \theta \iff \ddot{\theta} = \frac{3mg}{(M + 3m)L} \cos \theta = \omega_0^2 \cos \theta$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3mg}{(M + 3m)L}}$$

En multipliant cette équation par $\dot{\theta}$ et en intégrant on obtient :

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 \sin \theta + C \quad \text{avec } C \text{ constante}$$

Comme $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, il vient $C = 0$, d'où $\boxed{\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 \sin \theta}$.

On réinjecte les résultats dans les expressions de T_x et N pour trouver :

$$T_x = -mg \frac{M + 9m}{M + 3m} \sin \theta \quad \text{et} \quad N = mg \frac{M}{M + 3m} \cos \theta$$

On remarque que $N > 0$; N ne s'annule pas et donc la gomme ne peut pas "décoller" de la barre.

L'absence de glissement ne peut persister que si :

$$\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} < f_s \iff \frac{|T_x|}{N} < f_s \iff \frac{M + 9m}{M} \tan \theta < f_s$$

soit :

$$\boxed{\theta < \arctan \left(f_s \frac{M}{M + 9m} \right) \stackrel{\text{AN}}{=} 10,5^\circ}$$

3 Gravimétrie

Q26. Pour toute surface fermée S_F :

$$\oiint_{S_F} \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

où M_{int} est la masse intérieure à la surface S_F . L'analogie avec l'électrostatique consiste à remplacer la charge par la masse, le champ électrique par le champ de gravitation et $1/\epsilon_0$ par $-4\pi G$.

Q27. La répartition de masse est à symétrie sphérique et $\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(r) \vec{e}_r$. On prend comme surface de Gauss S_g une sphère de rayon $r > R$. Dans ce cas, $M_{\text{int}} = M_T$ et donc :

$$\oiint_{S_g} \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G M_T$$

d'où :

$$\mathcal{G}(r) = -G \frac{M_T}{r^2}$$

En particulier :

$$\vec{G}(O) = G \frac{M_T}{R_T^2} \vec{e}_z \iff g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

ou encore, en fonction de la masse volumique moyenne μ_m de la Terre : $\mu_m = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3}$:

$$g_0 = \frac{4G\mu_m\pi R_T}{3}$$

Q28. Le calcul est le même qu'aux questions précédentes. On adapte simplement le résultat :

$$\vec{g}_B = -\frac{GM_B}{r^2} \vec{e}_r$$

où $M_B = \mu' \frac{4}{3} \pi R^3$ donc :

$$\vec{g}_B = -\frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3r^2} \vec{e}_r$$

Q29. La projection de $-\vec{e}_r$ sur l'axe vertical \vec{e}_z est $-\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \frac{h}{r}$ donc $g_{Bz} = \frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3r^3} h$

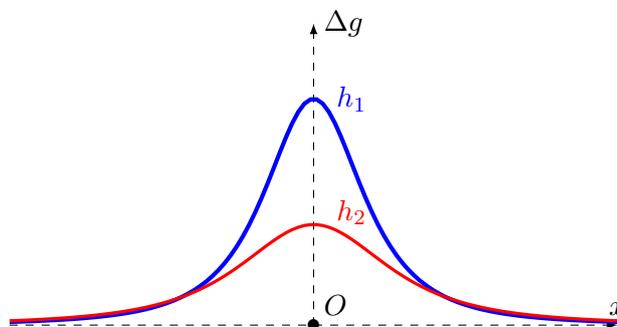
qu'on écrit aussi $g_{Bz} = \frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3(h^2 + x^2)^{3/2}} h$.

Q30. En utilisant la théorème de superposition, on peut considérer que le champ de gravitation de l'ensemble { Terre + boule de masse volumique $\mu_m + \Delta\mu$ } est celui créé par la Terre de masse volumique uniforme μ_m , auquel on superpose le champ créé par une boule de masse volumique uniforme $\Delta\mu$. Comme g_0 est la part du champ de gravitation créé par la Terre, on obtient bien que $g_z - g_0$ est la part du champ créé uniquement par la boule de masse volumique $\Delta\mu$.

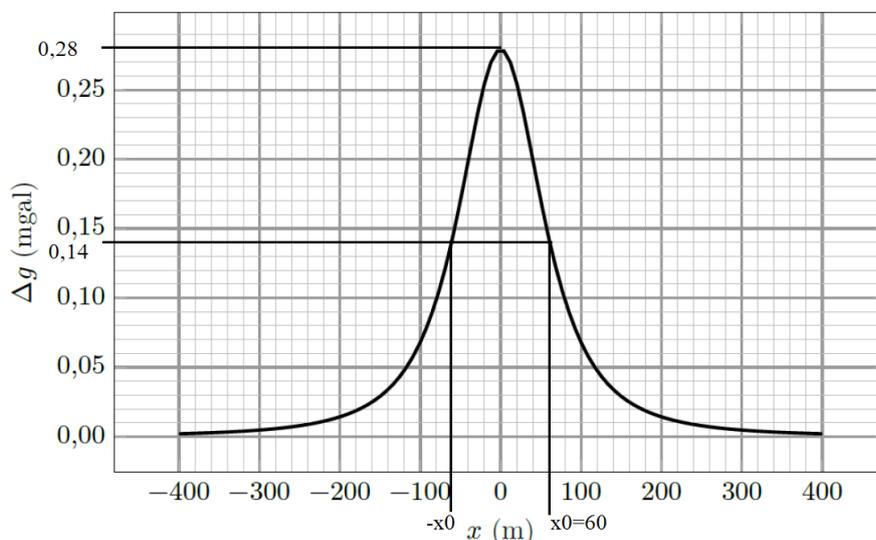
Q31. On reprend simplement le résultat de la question 29 en l'absence du terme μ_m ; il vient

$$\Delta g = g_{Bz} - g_0 = \frac{4G\Delta\mu\pi R^3 h}{3(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

- Q32.** Le tracé de la fonction $\Delta g(x)$ est celui d'une fonction paire de valeur maximale $\Delta g_{\max} = \frac{4\pi G \Delta \mu R^3}{3h^2}$ atteinte en $x = 0$ avec une largeur à mi-hauteur $\Delta x = 2x_0$ telle que $(x_0^2 + h^2)^{3/2} = 2h^3$, d'où $x_0 = h\sqrt{2^{2/3} - 1}$. Les tracés sont représentés dans la figure ci-dessous.

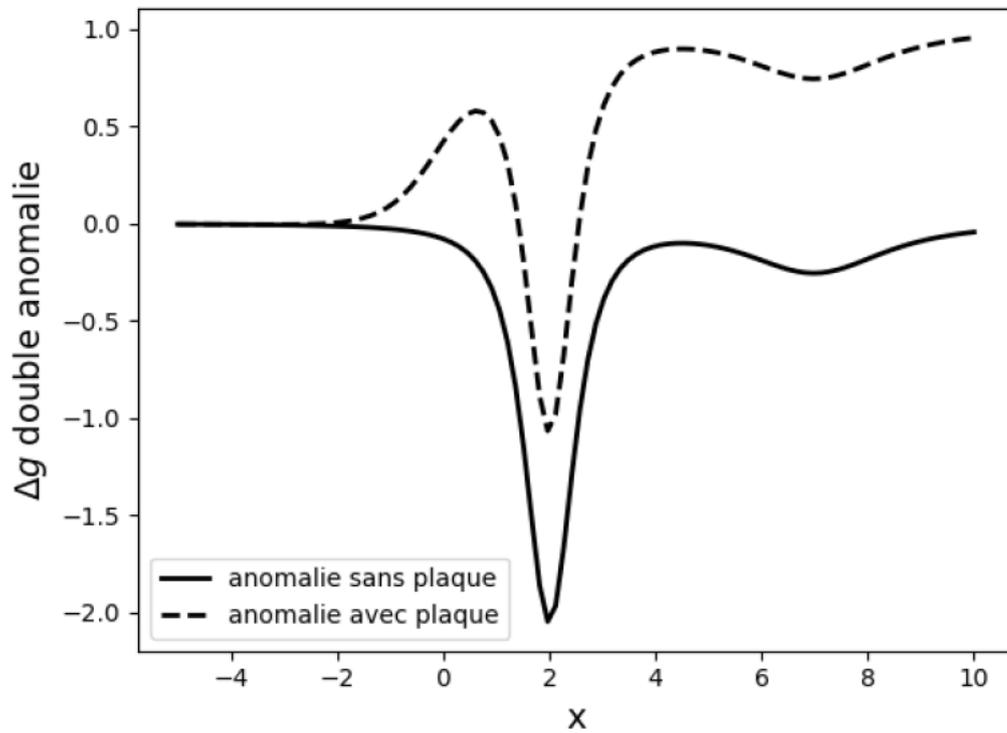


- Q33.** D'après ce qui précède, la largeur à mi-hauteur $\Delta x = 2x_0$ est donc liée à la profondeur h par $\Delta x = 2h\sqrt{2^{2/3} - 1}$ tandis que $\Delta g_{\max} = \frac{4\pi G \Delta \mu R^3}{3h^2}$.
- Q34.** Sur la courbe proposée on lit la largeur à mi-hauteur $\Delta x = 120$ m (voir figure ci-dessous), donc $h = 78$ m et la valeur maximale $\Delta g_{\max} = 0,28$ mgal = $0,28 \cdot 10^{-3} \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ permet de déterminer $R = \left(\frac{3h^2 \Delta g_{\max}}{4\pi G \Delta \mu}\right)^{1/3} = 39$ m. On vérifie bien que $R < h$, ce qui est cohérent.

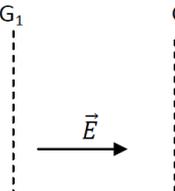


- Q35.** Il faut que l'effet cumulé de l'or et de la grotte s'annulent, donc disposer l'or au centre d'une part et faire en sorte que la masse totale de l'or soit la même que celle manquante dans la grotte. En effet, la symétrie sphérique étant respectée, l'application du théorème de Gauss conduit au même champ pour la sphère d'or et la sphère de roche. Il faut donc respecter la condition suivante : $R^3 \mu_m = R'^3 \rho_{or}$.
- Q36.** La masse maximale d'or est donc $m_{or} = \frac{4}{3}\pi R'^3 \rho_{or} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu_m$ soit avec $\mu_m \simeq 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ d'après la figure 9, on en déduit $m_{or} \simeq 8,4 \cdot 10^3 \text{ kg} = 8,4 \text{ tonnes}$. On peut également en déduire le rayon de la boule d'or, même si cela n'est pas demandé explicitement, qui vaut $R' = 0,47 \text{ m}$. La boule d'or est bien inférieure au rayon de la cavité.
- Q37.** Il faut superposer deux anomalies dues aux grottes à celle due à la plaque de calcaire.

Dans une couche uniforme, les deux grottes placées en x_1 et $x_2 > x_1$ provoqueraient deux anomalies successives. Comme $h_1 < h_2$, la première est plus intense et plus piquée. Enfin, comme il s'agit de grottes, $\Delta\mu = 0 - \mu_m = -\mu_m < 0$. Si en plus on tient compte du caractère semi infini d'une plaque, on aurait une superposition des effets, d'où le graphe :



4 Séparation d'isotopes de l'uranium par spectrométrie de masse (d'après Centrale TSI 2012)

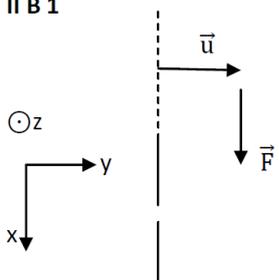
II A 1)  pour que les ions positifs soient accélérés, il faut que le champ électrique soit dirigé de G₁ vers G₂, or \vec{E} est dans le sens des potentiels décroissants : $V_{G1} - V_{G2} > 0$

II A 2) L'énergie mécanique est constante au cours du temps $E_m(O_1) = E_m(O_2)$ d'où $0 + e.V_{G1} = \frac{1}{2} m u^2 + e.V_{G2}$

$u_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}}$ $u_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}$ avec $m_1 = M_1/N_A$ et $m_2 = M_2/N_A$ (partie chimie pour M_1 et M_2)

II A 3) Energie cinétique acquise par les ions : $E_c = eU = 15,0 \text{ keV}$ d'où **U = 15 kV**

$u_1 = 111 \text{ km/s}$ $u_2 = 110 \text{ km/s}$

II B 1)  $\vec{B} \odot$ Lorsqu'un ion pénètre dans la chambre de déviation, il est soumis à la force $\vec{F} = e \vec{u} \wedge \vec{B}$, cette force doit être dirigée vers le point F, d'où le sens de \vec{B} sur le schéma

II B 2) $m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{v} \wedge \vec{B}$

En projection sur ez : $m \frac{dv_z}{dt} = 0$ d'où $v_z = \text{cte} = 0$ d'où $z = \text{cte} = 0$ (d'après conditions initiales) : le mvt est plan, dans le plan O_2xy (= plan de la figure).

La force est orthogonale à la vitesse, donc sa puissance est nulle : $E_c = \text{cte}$, donc $v = \text{cte} = u$, le mvt est uniforme. L'accélération normale est v^2/R , avec R rayon de courbure de la trajectoire

$mu^2/R = e u B$ soit $R_1 = \frac{m_1 u_1}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um_1}{e}}$ $R_2 = \frac{m_2 u_2}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um_2}{e}}$

Le rayon de courbure est constant, la trajectoire est un cercle.

Comme la vitesse est tangente au cercle en O_2 , et portée par l'axe O_2y , le diamètre du cercle est selon O_2x .

Autre méthode : en intégrant $m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{v} \wedge \vec{B}$, on obtient $\vec{v}(M) = \left(-\frac{e\vec{B}}{m}\right) \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{v}_0$: il existe un point C fixe dans R tel que

$\vec{v}(M) = \left(-\frac{e\vec{B}}{m}\right) \wedge \overrightarrow{CM}$ avec $\left(-\frac{e\vec{B}}{m}\right) \wedge \overrightarrow{O_2C} + \vec{v}_0 = \vec{0}$

Le mouvement est circulaire uniforme autour de Cz avec $\vec{\omega} = -e\vec{B}/m$ et $R = O_2C = m v_0/eB \dots$

II B 3) les ions de l'uranium 235 passent par F ssi $2R_1 = D$ soit $B = \frac{2m_1 u_1}{eD} = \frac{2}{D} \sqrt{\frac{2Um_1}{e}} = 0,576 \text{ T}$

II B 4) $2R_2 = 946 \text{ mm} > 2R_1 + L'$: les ions de l'isotope 238 ne passent pas par la fente F, il y a séparation isotopique.

II B 5) Charge passant dans le dispositif en un an : $Q = It$ avec $t = 365.25 \cdot 24 \cdot 3600$ secondes
 $Q = 3,156 \cdot 10^6 \text{ C}$

Nombre d'ions : $N = \frac{Q}{e} = 1,972 \cdot 10^{25}$

Nombre d'ions ${}_{92}^{235}\text{U}^+$ $7 \cdot 10^{-3} N = 1,380 \cdot 10^{23}$ soit 0,229 mol soit 53,9 grammes. Pas beaucoup !