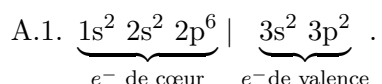


MP2 - Correction - DS 3 (CCINP - e3a)

1 Chimie

Partie 1 : ATOMISTIQUE et CRISTALLOGRAPHIE

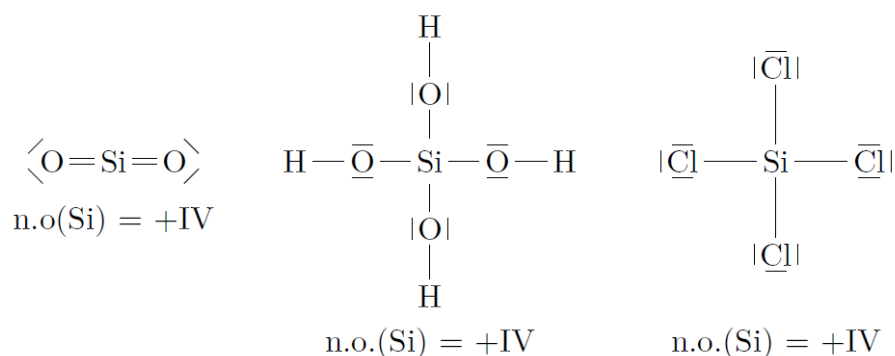
A. Structure du silicium



Rappelons que les électrons de cœur sont ceux qui ne sont pas des électrons de valence.

A.2. La valeur maximale du nombre quantique principal est $n = 3$: 3^{ème} période; Il y a 4 électrons de valence, donc : $10 + 4 = 14^{\text{ème}}$ colonne du tableau périodique. Le carbone C a aussi 4 électrons de valence. C est plus électronégatif car il est situé au dessus de Si (dans la 2^{ème} période). On sait que l'électro-négativité augmente de bas en haut et de la gauche vers la droite du tableau.

A.3. Le silicium est tétravalent, ce qui conduit aux composés suivants :



Aucun élément ne possède de charge formelle. La première formule de Lewis est d'ailleurs obtenue en utilisant deux liaisons doubles, ce qui annule les charges formelles aussi bien sur l'oxygène que sur le silicium : le composé en est d'autant plus stable.

Pour calculer le nombre d'oxydation de Si, rappelons qu'on attribue tous les électrons de liaison à l'élément le plus électronégatif, c'est à dire O ou Cl ici. Dans les trois composés, Si a perdu tous ses électrons de valence (= 4), d'où : n.o.(Si) = +IV.

B. Cristallographie du silicium et du nitrure de silicium

B.1. Site T : $N_T = 8$ et sites O : $N_O = 1 + 12/4 = 4$

B.2. La population de Si sera : $N(\text{Si}) = \underbrace{8/8}_{\text{sommets}} + \underbrace{6/2}_{\text{faces}} + \underbrace{4}_{\text{sites T}} = 8$ atomes par maille cubique.

Un atome de Silicium aura une coordinence de 4 (c'est à dire 4 plus proches voisins) qui correspond à celle d'un atome dans un site T.

B.3. Les atomes sont en contact sur la grande diagonale d'un cube de côté $a/2$ (on le voit à partir d'un site T) :

$$2r(\text{Si}) = \sqrt{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \implies r(\text{Si}) = \frac{\sqrt{3}a}{8}$$

B.4.

$$\rho = \frac{\text{masse des atomes}}{\text{volume de la maille}} = \frac{8 M(\text{Si})}{N_A a^3} = \frac{3\sqrt{3} M(\text{Si})}{8^2 N_A r(\text{Si})^3}$$

et donc :

$$r(\text{Si}) = \left(\frac{3\sqrt{3} M(\text{Si})}{8^2 N_A \rho} \right)^{1/3} \approx 118 \text{ pm}$$

B.5.

$$C = \frac{\text{volume des atomes}}{\text{volume de la maille}} = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi r(\text{Si})^3}{a^3} = \frac{8 \times 4\pi \times 3\sqrt{3}}{3 \times 8^3}$$

et donc

$$C = \frac{\sqrt{3}\pi}{16} = 0,34$$

C'est une valeur bien inférieure à la compacité maximale que l'on peut obtenir avec une structure cfc (0,74).

B.6. Le silicium est matériau très dur car les atomes de Si sont liés par des liaisons covalentes.

B.7. On parle de variétés allotropiques.

$$\text{B.8. Nombre de Si}^{4+} \text{ par maille cubique : } \underbrace{\frac{8}{8}}_{\text{sites T}} + \underbrace{\frac{1 + 12/4}{2}}_{\text{sites O}} = 3.$$

Nombre de N^{3-} par maille : 4 (structure cfc)La stœchiométrie Si_3N_4 est donc respectée.

B.9. Soit r_T le rayon du plus grand cation que l'on peut insérer dans un site T (= habitabilité du site). Ce cation est alors en contact avec un N^{3-} le long de la grande diagonale d'un cube d'arête $a/2$, d'où :

$$r_T + r(\text{N}^{3-}) = \sqrt{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \iff a = \frac{4}{\sqrt{3}} (r(\text{N}^{3-}) + r_T)$$

D'autre part, si les anions sont en contact le long de la diagonale d'une face du grand cube :

$$4r(\text{N}^{3-}) = \sqrt{2} a \iff a = \frac{4r(\text{N}^{3-})}{\sqrt{2}}$$

d'où :

$$r_T = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r(\text{N}^{3-}) = 31,4 \text{ pm}$$

Ceci est cohérent avec les atomes de Si qui sont dans les sites T (coordination 4) : $r(\text{Si}) = 27 \text{ pm} < r_T$.

B.10. Il s'agit d'une liaison ionique : liaison forte car la différence d'électro-négativité est importante. Ce solide doit posséder une température de fusion élevée (une recherche sur internet fournit 1900°C).

Partie 2 : CINÉTIQUE CHIMIQUE

1.

$$v = -\frac{d[\text{RBr}]}{dt} = -\frac{d[\text{I}^-]}{dt} = \frac{d[\text{RI}]}{dt} = \frac{d[\text{Br}^-]}{dt}$$

Si, de plus, la réaction admet un ordre par rapport à chaque réactif, on peut écrire :

$$v = k[\text{RBr}]^\alpha [\text{I}^-]^\beta$$

où α et β sont les ordres partiels par rapport à RBr et à I^- .

2. a) $\frac{[\text{RBr}]_0}{[\text{I}^-]_0} = 21$. RBr étant en large excès par rapport à I^- , on peut supposer que sa concentration ne va pas beaucoup varier au cours de la transformation chimique. Il y a donc dégénérescence de l'ordre par rapport à RBr.

$$[\text{RBr}] \approx [\text{RBr}]_0 \implies v \approx \underbrace{k([\text{RBr}]_0)^\alpha}_{\text{constante}} [\text{I}^-]^\beta = k_{app} [\text{I}^-]^\beta$$

où k_{app} est la constante de vitesse apparente :

$$k_{app} = k([\text{RBr}]_0)^\alpha$$

- b) Dans le cas où $\beta = 1$:

$$-\frac{d[\text{I}^-]}{dt} = k_{app}[\text{I}^-] \implies [\text{I}^-] = [\text{I}^-]_0 \exp(-k_{app}t) \quad \text{donc} \quad \ln[\text{I}^-] = \ln[\text{I}^-]_0 - k_{app}t$$

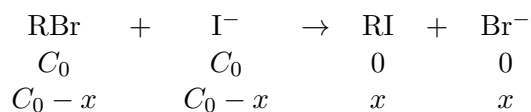
Une régression linéaire sur les couples $(t, \ln[\text{I}^-])$ conduit à un coefficient de corrélation : $|r| = 0,99999891$ ce qui confirme l'hypothèse $\beta = 1$.

- c) Le calcul de régression linéaire précédent donne la pente de la droite $\ln[\text{I}^-] = f(t)$ qui vaut $-k_{app}$. On en déduit que :

$$k_{app} = 0,266 \text{ h}^{-1} = 7,39 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

3. Dans cette partie les concentrations initiales sont égales et nous poserons : $[\text{RBr}]_0 = [\text{I}^-]_0 = C_0$.

- a) Un tableau d'avancement donne (en concentration) :



où x est l'avancement volumique.

D'autre part :

$$\tau = \frac{n_{\text{RBr}}(0) - n_{\text{RBr}}(t)}{n_{\text{RBr}}(0)} \implies n_{\text{RBr}}(t) = n_{\text{RBr}}(0)(1 - \tau)$$

En divisant par le volume V de la solution, nous obtenons :

$$[\text{RBr}] = [\text{I}^-] = C_0(1 - \tau) \tag{1}$$

- b) La vitesse v de la réaction s'écrit désormais :

$$v = k[\text{RBr}]^\alpha [\text{I}^-] = k[\text{RBr}]^{1+\alpha} = -\frac{d[\text{RBr}]}{dt}$$

ce qui conduit à une équation différentielle à variables séparables dont la solution s'écrit :

$$\int_{C_0}^{[\text{RBr}]} \frac{d[\text{RBr}]}{[\text{RBr}]^{1+\alpha}} = - \int_0^t k dt = -kt$$

Si $\alpha \neq 0$, cela conduit à :

$$\boxed{-\frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{[\text{RBr}]^\alpha} \right]_{C_0}^{[\text{RBr}]} = -kt \quad \text{donc} \quad \frac{1}{[\text{RBr}]^\alpha} = \frac{1}{C_0^\alpha} + \alpha kt}$$

et si $\alpha = 0$, cela donne :

$$\boxed{\ln[\text{RBr}] = \ln C_0 - kt}$$

La relation (1) permet de construire le tableau ci-dessous :

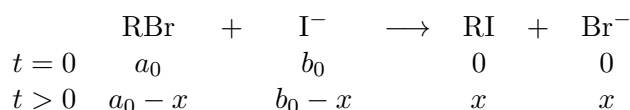
t (en h)	0	0,5	1	2	4	8	12
[RBr] (mol.L ⁻¹)	4,20.10 ⁻³	3,72.10 ⁻³	3,34.10 ⁻³	2,77.10 ⁻³	2,07.10 ⁻³	1,37.10 ⁻³	1,03.10 ⁻³

- Pour $\alpha = 0$, une régression linéaire sur les couples $(t, \ln[\text{RBr}])$ conduit à un coefficient de corrélation $|r| = 0,984 < 0,999$. α **n'est donc pas égal à 0**.
 - Pour $\alpha = 1$, une régression linéaire sur les couples $(t, 1/[\text{RBr}])$ conduit à un coefficient de corrélation $|r| = 0,999\ 993 > 0,99$ **ce qui confirme que $\alpha = 1$** . On peut remarquer que cela signifie que la loi de vitesse suit ici la loi de Van't Hoff, et qu'il s'agit peut-être d'un acte élémentaire.
- c) D'après l'étude précédente, le coefficient directeur de la droite $1/[\text{RBr}] = f(t)$ est k . On en déduit :

$$\boxed{k = 61,2 \text{ L.mol}^{-1}.\text{h}^{-1} = 1,70.10^{-2} \text{ L.mol}^{-1}.\text{s}^{-1}}$$

4. On utilise le **tableau III**.

- a) Déterminons la loi d'évolution des concentrations en fonction du temps. En posant $[\text{RBr}]_0 = a_0$ et $[\text{I}^-]_0 = b_0$, le tableau d'avancement s'écrit (en utilisant les concentrations et l'avancement volumique x) :



Par définition de la vitesse de réaction v :

$$v = -\frac{d[\text{RBr}]}{dt} = \frac{dx}{dt} = k [\text{RBr}][\text{I}^-] = k(a_0 - x)(b_0 - x)$$

avec $k = k(323\text{K})$. Cette équation différentielle à variables séparables se résout en :

$$\int_0^x \frac{dx'}{(a_0 - x')(b_0 - x')} = \int_0^t k dt' = kt$$

et donc :

$$\int_0^x \frac{dx'}{a_0 - x'} - \int_0^x \frac{dx'}{b_0 - x'} = (b_0 - a_0)kt$$

d'où :

$$\boxed{\ln \left[\frac{(b_0 - x)a_0}{(a_0 - x)b_0} \right] = (b_0 - a_0)kt}$$

- b) Dans cet expérience, le réactif limitant est RBr et le temps de demi-réaction est défini pour $x = a_0/2$, ce qui conduit à :

$$k = \frac{1}{(b_0 - a_0)t_{1/2}} \ln \left[\frac{(2b_0 - a_0)}{b_0} \right]$$

Application numérique : $k(323\text{K}) = 6,9 \cdot 10^{-5} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

- c) Pour cette deuxième expérience à $T = 353 \text{ K}$, les deux concentrations initiales sont égales. En posant $[\text{RBr}]_0 = [\text{I}^-]_0 = a_0$, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = k' (a_0 - x)^2$$

avec $k' = k(353\text{K})$. Cette équation se résout en écrivant :

$$\int_0^x \frac{dx'}{(x' - a_0)^2} = \int_0^t k' dt' = k't \iff -\frac{1}{x - a_0} - \frac{1}{a_0} = k't$$

Pour $t = t_{1/2}$, $x = a_0/2$ et donc $k't_{1/2} = \frac{1}{a_0}$, d'où :

$$k' = \frac{1}{a_0 t_{1/2}}$$

Application numérique : $k(353\text{K}) = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

- d) D'après la loi d'Arrhénius, l'énergie d'activation E_a est liée à la constante de vitesse k par l'équation :

$$\frac{d \ln k}{dT} = \frac{E_a}{RT^2} \implies \ln k(T) = -\frac{E_a}{RT} + K$$

où K est une constante. En posant $T_1 = 323\text{K}$ et $T_2 = 353\text{K}$, nous obtenons par différence :

$$\ln k' - \ln k = -\frac{E_a}{RT_2} + \frac{E_a}{RT_1} \iff \ln \left(\frac{k'}{k} \right) = \frac{E_a}{R} \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}$$

soit :

$$E_a = \frac{RT_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \left(\frac{k'}{k} \right)$$

Application numérique : $E_a = 1,2 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \approx 120 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, ce qui est un bon ordre de grandeur.

2 Point matériel dans un tunnel

1. (a) $\vec{F}_{1/2}^e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \vec{u}_{12}$. Un petit schéma classique permet vérifier que cette force est répulsive si q_1 et q_2 sont de même signe. De plus, $\vec{F}_{1/2}^e = q_2 \vec{E}_1(M_2)$, donc dans le cas général $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$.
- (b) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, donc la force électrostatique s'écrit $\vec{F} = q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(qV)$, or celle-ci dérive d'une énergie potentielle, donc $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$, et par identification, on en déduit que : $E_p = qV$.
- (c) Théorème de Gauss de l'électrostatique : $\oint_{\Sigma_{\text{fermée}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
2. (a) De même que précédemment $\vec{F}_{1/2}^g = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$ et $\vec{G} = -\frac{Gm}{r^2} \vec{u}_r$.
- (b) Analogies entre les grandeurs électrostatiques et les grandeurs gravitationnelles :

$$\begin{array}{ccc} q & \leftrightarrow & m \\ \vec{E} & \leftrightarrow & \vec{G} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} & \leftrightarrow & -G \end{array}$$

Théorème de Gauss de la gravitation : $\oint_{\Sigma_{\text{fermée}}} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$

- (c) La répartition de masse étant à symétrie sphérique, $\vec{G} = \mathcal{G}(r) \vec{u}_r$. L'application du théorème de Gauss en gravitation à une sphère de rayon $r < R_T$ conduit à :

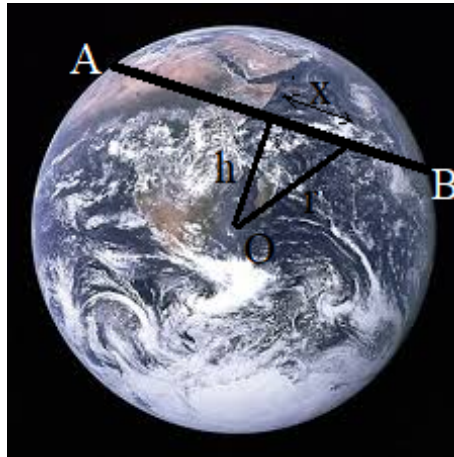
$$4\pi r^2 = -4\pi G M_{\text{int}}(r) = -4\pi G \times \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\text{Or } \frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho = M_T, \text{ donc } \vec{G} = -\frac{GM_T}{R_T^3} r \vec{u}_r$$

- (d) Par intégration, on en déduit : $\phi(r) = \frac{GM_T}{2R_T^3} r^2 + \text{cte}$.
- (e) L'énergie potentielle gravitationnelle d'une masse m qui se déplace dans le tunnel vaut donc $E_p = m\phi(r) = \frac{GmM_T}{2R_T^3} r^2$ en prenant $r = 0$ comme référence.
3. (a) Comme on néglige les forces de frottements et les forces d'inertie dues à la rotation de la Terre, il n'y a pas de forces dissipatives, et l'énergie mécanique se conserve. Par ailleurs, en utilisant le schéma ci-dessous ($v = \dot{x}$ et $r = \sqrt{x^2 + h^2}$), on en déduit :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{GmM_T}{2R_T^3} (x^2 + h^2)$$

où h est la distance la plus proche du tunnel au centre de la Terre.



Par dérivation, on a donc :

$$\ddot{x} + \frac{Gm}{R^3} x(t) = 0$$

Méthode 2 : En utilisant un PFD au point matériel dans le référentiel terrestre (référentiel du tunnel) supposé galiléen : $m\vec{a} = m\vec{G}$, et en projection sur \vec{u}_x :

$$m\ddot{x} = -\frac{GmM_T}{R_T^3} x$$

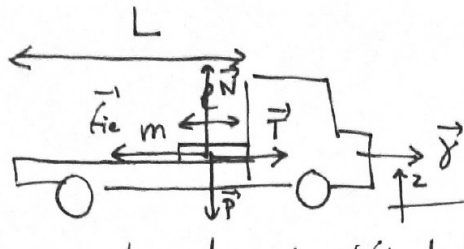
et on retrouve donc l'oscillateur harmonique précédent.

(b) Il s'agit d'un mouvement d'oscillation sinusoïdale de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^3}}$ et de

période $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \simeq 4700 \text{ s} \simeq 1h20mn.$

(c) Tout ceci n'est évidemment pas très réaliste, à commencer par l'absence de frottement, la dimension du tunnel, le fait qu'on néglige les forces d'inertie, qu'on considère la Terre comme une boule homogène, la vitesse très importante de la masse m si le tunnel est de grande longueur, puisque la période est indépendante de cette grandeur... Un train "gravitationnel" fonctionnant sans apport d'énergie autre que gravitationnelle sous l'océan Atlantique ne verra malheureusement jamais le jour !

3 Camion qui accélère



On pose $\vec{T} = T \vec{U}_x$
 $\vec{\gamma} = \gamma \vec{U}_x, \gamma > 0$

1) PFD au carton dans le référentiel du camion non galiléen :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{in}$$

$-m \vec{\gamma}$ car R_{camion} en translation par rapport à R_{sol}

// \vec{U}_x $m \ddot{x} = T - m \gamma$ (1)

// \vec{U}_z $0 = N - mg$ (2)

Dans un premier temps, le carton ne glisse pas, donc $x_{carton} = x_{camion}$ et le carton reste immobile dans le référentiel du camion $\Rightarrow \ddot{x} = 0$

De plus, d'après les lois de Coulomb, $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\| = f_s mg$

(1) $\Rightarrow T = m \gamma$ donc $m \gamma \leq f_s mg$.

Pas de glissement si $\boxed{\gamma \leq f_s g}$

2) On considère que $\gamma > f_s g$ et il y a donc glissement, et dans ce cas, $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$ et :

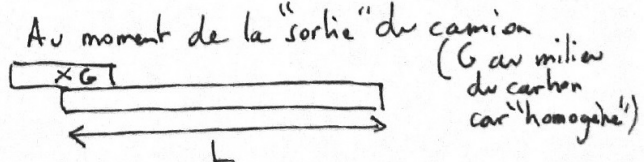
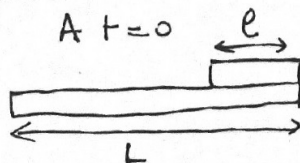
(1) $\Rightarrow m \ddot{x} = f_d mg - m \gamma$, soit $\ddot{x} = f_d g - \gamma < 0$ car $\gamma > f_s g > f_d g$.

\hookrightarrow le carton glisse vers l'arrière du camion.

$\Rightarrow \dot{x} = (f_d g - \gamma)t + 0$

$\Rightarrow x(t) = \frac{(f_d g - \gamma)t^2}{2} + 0$ \hookrightarrow on prend $x=0$ à l'emplacement initial du carton.

3) Le carton glisse du camion lorsque son centre de gravité sort de la plateforme \hookrightarrow ou bascule de la plate-forme



Le carton a parcouru une distance $L - l + \frac{l}{2} = L - \frac{l}{2}$ vers les $x < 0$

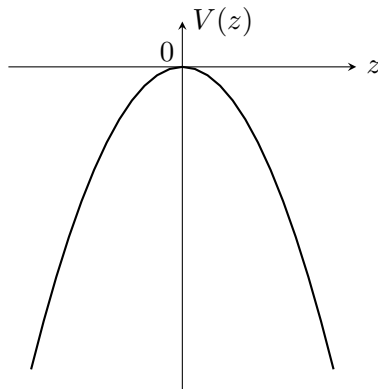
soit $t_{bascule} = t_b$ $x(t_b) = -(L - \frac{l}{2}) = \frac{(f_d g - \gamma)t_b^2}{2} \Rightarrow \boxed{t_b = \sqrt{\frac{2(L - \frac{l}{2})}{\gamma - f_d g}}}$ $[t_b] = \frac{T}{OK}$

4) Pendant ce temps, le carton a parcouru la distance d t_b (double intégration du PFD au camion dans R_{sol})
 $d = \frac{\gamma t_b^2}{2} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2(L - \frac{l}{2})}{\gamma - f_d g} \right) = \frac{L - \frac{l}{2}}{1 - \frac{f_d g}{\gamma}} > L - \frac{l}{2}$ Le camion parcourt une distance plus grande que le carton, sauf si $f_d = 0$, ce qui est cohérent (le carton reste sur place).

4 PIÈGES ÉLECTRONIQUES

I. Piège 1 dimension

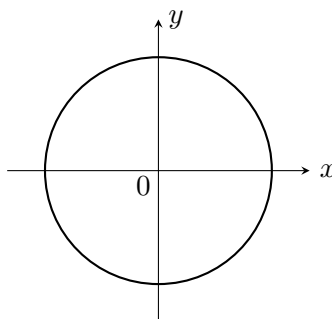
- 1) a) Pour $x = y = 0$, on a $V(z) = V_0 \frac{z^2}{2d^2}$, ce qui est une parabole. Il faut seulement faire attention au fait que $V_0 < 0$.



- b) Dans le plan (Oxy) on a $z = 0$. La courbe équipotentielle $V = V_1 > 0$ a pour équation :

$$-V_0 \frac{x^2 + y^2}{4d^2} = V_1 \iff x^2 + y^2 = -4d^2 \frac{V_1}{V_0} > 0$$

ce qui est l'équation d'un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $R = 2d\sqrt{\frac{V_1}{-V_0}}$.



- 2) Comme chaque électrode métallique est équipotentielle, on peut prendre un point quelconque sur celles-ci pour calculer la différence de potentiel. On aura par exemple :

$$V_0 = V(0, 0, z_0) - V(0, r_0, 0) = V_0 \frac{2z_0^2}{4d^2} + V_0 \frac{r_0^2}{4d^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{2z_0^2 + r_0^2 = 4d^2}$$

- 3) a) On calcule $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, ce qui conduit à :

$$\vec{E} = V_0 \frac{x}{2d^2} \vec{u}_x + V_0 \frac{y}{2d^2} \vec{u}_y - V_0 \frac{z}{d^2} \vec{u}_z$$

On applique ensuite le principe fondamental de la dynamique (abrégé PFD par la suite) à l'électron, en ne tenant compte que de la force électrique et on projette sur la base cartésienne :

$$\ddot{x} = -\frac{eV_0}{2md^2} x ; \quad \ddot{y} = -\frac{eV_0}{2md^2} y \quad \text{et} \quad \ddot{z} = \frac{eV_0}{md^2} z$$

L'équation différentielle en z peut s'écrire :

$$\ddot{z} - \frac{eV_0}{md^2} z = 0$$

et ce mouvement ne peut être confiné si cette équation est celle d'un oscillateur harmonique, c'est à dire si $V_0 < 0$ (Dans le cas contraire, on obtient une solution composée d'exponentielles réelles et qui diverge lorsque $t \rightarrow +\infty$, cf. plus loin pour les mouvements en x et y).

En revanche, le mouvement selon x et y n'est pas confiné si $V_0 < 0$ puisque dans ce cas les équations s'écrivent (en x par exemple) :

$$\ddot{x} + \frac{eV_0}{2md^2} x = 0 \quad \text{d'où} \quad \ddot{x} - \frac{e|V_0|}{2md^2} x = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit : $r^2 - \frac{e|V_0|}{2md^2} = 0$ ce qui conduit aux deux racines réelles :

$$r_+ = \sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}} \quad \text{et} \quad r_- = -\sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}}$$

d'où une solution de la forme :

$$x(t) = A \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}} t \right) + B \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}} t \right)$$

qui tend vers $\pm\infty$ quelles que soient les valeurs des constantes A et B .

b) L'équation en z étant celle d'un oscillateur harmonique, sa pulsation propre est :

$$\omega_z = \sqrt{\frac{e|V_0|}{md^2}} = 1,58 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$$

ce qui correspond à une fréquence $f_z = \omega_z/2\pi = 25$ MHz.

II. Piège 2 dimensions

5) À l'instant t le vecteur vitesse de l'électron s'écrit $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$ et son accélération est $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$. Il n'est soumis qu'à la partie magnétique de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B} = -eB \dot{y} \vec{u}_x + eB \dot{x} \vec{u}_y$$

d'où les trois équations du mouvement en projection sur les vecteurs de la base cartésienne et en posant $\omega_c = eB/m$ (pulsation cyclotron) :

$$\ddot{x} = -\omega_c \dot{y} ; \quad \ddot{y} = \omega_c \dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = 0$$

Application numérique : $\omega_c = 8,8 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$ et $f_c = \omega_c/2\pi = 140$ MHz.

6) Posons $v_x = \dot{x}$ et $v_y = \dot{y}$. Les équations précédentes s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \dot{v}_x &= -\omega_c v_y \\ \dot{v}_y &= \omega_c v_x \end{cases}$$

d'où, en posant $v = v_x + iv_y$:

$$\dot{v} = i\omega_c v \quad \text{donc} \quad v(t) = A \exp(i\omega_c t)$$

avec $A = u(0) = v_0 \sin \alpha$. On a ensuite, en posant $u = x + iy$:

$$\dot{u} = v = v_0 \sin \alpha \exp(i\omega_c t) \quad \text{d'où} \quad u(t) = -i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \exp(i\omega_c t) + K$$

où K est une constante complexe déterminée par les conditions initiales : $u(0) = 0$ donc $K = i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}$. On en déduit que :

$$u(t) = -i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \exp(i\omega_c t) + i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}$$

et donc :

$$x(t) = \operatorname{Re}[u(t)] = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad y(t) = \operatorname{Im}[u(t)] = -\frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}$$

Enfin l'équation paramétrique sur z s'obtient très facilement :

$$\dot{z} = v_0 \cos \alpha \quad \text{et donc} \quad z(t) = v_0 \cos \alpha t$$

7) Dans le plan (Oxy) la trajectoire est un cercle :

$$x^2 + \left(y - \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \right)^2 = \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \right)^2$$

de centre $\Omega(0, \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c})$ et de rayon $R = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}$. Le mouvement de l'électron est donc bien confiné dans le plan (Oxy).

A.N. : $R = 0,11$ mm ce qui est cohérent avec l'ordre de grandeur des dimensions des électrodes.

En revanche le mouvement n'est pas confiné selon l'axe Oz , sauf si $\alpha = \pi/2$, mais on ne peut jamais réaliser ceci rigoureusement dans une expérience réelle. L'électron aura toujours une composante non nulle de sa vitesse initiale v_{0z} selon Oz (aussi petite soit-elle).

III. Piège 3 dimensions

8) On suppose bien sûr que $V_0 < 0$. En reprenant les équations du **I.** et **II.**, on aboutit à :

$$\ddot{x} = -\omega_c y + \frac{\omega_z^2}{2} x \quad ; \quad \ddot{y} = \omega_c x + \frac{\omega_z^2}{2} y \quad \text{et} \quad \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0$$

9) On obtient :

$$\ddot{u} - i\omega_c u - \frac{\omega_z^2}{2} u = 0$$

10) L'équation caractéristique associée à cette équation homogène a pour discriminant $\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_z^2 < 0$ et les deux racines de cette équations sont donc :

$$r_{\pm} = i \frac{\omega_c}{2} \pm i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2}$$

En posant :

$$\omega_1 = \frac{\omega_c}{2} + \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\omega_c}{2} - \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2}$$

on peut donc écrire la solution générale sous la forme :

$$u(t) = A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(i\omega_2 t)$$

Application numérique : $f_1 = 275$ MHz et $f_2 = 4,5$ MHz.

- 11)** Le mouvement est bien confiné le long de Oz d'après la question 4)a). Quant au mouvement dans le plan (Oxy) , il vérifie :

$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq |A_1| |\exp(i\omega_1 t)| + |A_2| |\exp(i\omega_2 t)| = |A_1| + |A_2|$$

ce qui fait que la trajectoire dans ce plan est inscrite dans le cercle de rayon $R = |A_1| + |A_2|$. C'est donc aussi un mouvement confiné.