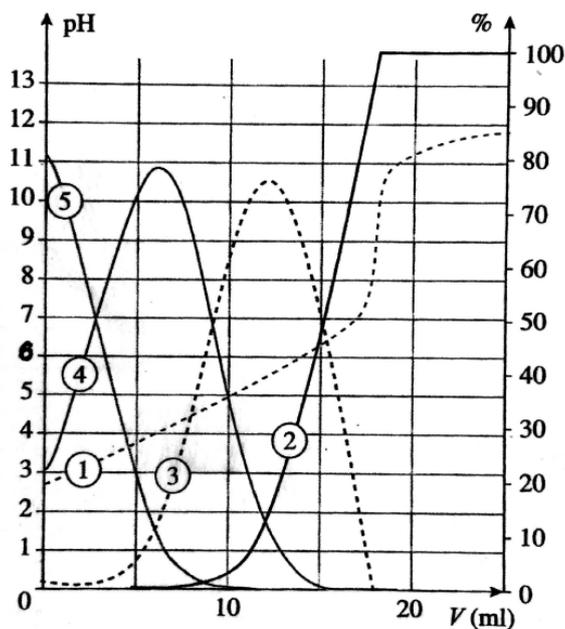


**MP2 - DS 4 (sujet unique)**  
(Samedi 3 décembre 2022 - Durée 4h)

## 1 Simulation du dosage de l'acide citrique

L'acide citrique est un triacide noté  $H_3A$ . On dose un volume  $V_0 = 20,0$  mL d'une solution d'acide citrique de concentration  $c$  par une solution de soude de concentration  $c_B = 0,050 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Afin d'interpréter le graphe expérimental obtenu, on réalise une simulation de ce dosage. La simulation par le logiciel *Simultit* est donnée ci-après.

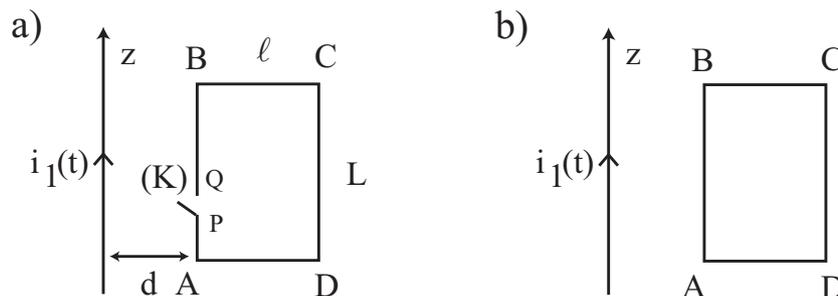


Le maximum de la courbe dérivée,  $\frac{d\text{pH}}{dV_B}$ , non représentée sur le graphe, a pour abscisse  $V_{eq} = 18,0$  mL.

1. Identifier chacune des courbes représentées.
2. Déterminer la concentration  $c$  utilisée pour la simulation.
3. Déterminer les  $pK_{A_i}$  de l'acide citrique.
4. Montrer que les trois acidités de l'acide citrique ne sont pas dosées séparément et le justifier. Écrire les équations des réactions correspondantes et calculer leurs constantes de réaction respectives.

## 2 Phénomènes d'induction électromagnétique

Dans le vide, un conducteur rectiligne, d'axe  $z$ , infiniment long, est parcouru par un courant d'intensité  $i_1$ . Un cadre rectangulaire conducteur  $ABCD$ , de longueur  $L = AB = CD$ , de largeur  $\ell = BC = AD$ , est placé dans un plan contenant l'axe  $z$ . Le cadre  $ABCD$  est considéré comme purement résistif, de résistance  $R$ . Le côté  $AB$ , parallèle à l'axe et situé à la distance  $d$  de la ligne de courant, comporte un interrupteur ( $K$ ) de dimensions négligeables, susceptible de fermer ou d'ouvrir le circuit au niveau de deux points  $P$  et  $Q$  très rapprochés (figure a). Les conducteurs sont des fils cylindriques, de diamètre négligeable.



### I Flux du vecteur champ magnétique

1. L'espace est rapporté, en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , à un repère de base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . Etablir l'expression vectorielle du champ magnétique  $\vec{B}_1(M)$  créé par le courant d'intensité  $i_1$ , en tout point  $M$  de l'espace situé à une distance  $r$ , non nulle, du conducteur filiforme.
2. Préciser, à l'aide d'un schéma, l'allure des lignes de champ magnétique.
3. Déterminer le flux  $\Phi_1$  du vecteur  $\vec{B}_1(M)$  à travers le cadre rectangulaire  $ABCD$ .

### II Force électromotrice et courants induits

Le dispositif précédent est étudié dans diverses situations.

1. *Premier cas* : le cadre est immobile, l'interrupteur ( $K$ ) est fermé et le courant  $i_1 = I_1$  est constant et positif. Existe-t-il une f.e.m. (force électromotrice)  $e$  induite dans le cadre ? Si oui, l'exprimer en fonction des données de l'énoncé.
2. *Deuxième cas* : le cadre est immobile et le courant d'intensité  $i_1$  varie, au cours du temps  $t$ , selon la loi :  $i_1(t) = at + b$  (avec (où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives). L'interrupteur ( $K$ ) est fermé (voir figure b). On oriente le circuit dans le sens  $ABCD$ .
  - (a) Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, l'intensité  $i_2$  de ce courant induit. Commenter son signe.
  - (b) L'interrupteur ( $K$ ) est maintenant ouvert. Déterminer, en fonction des données de l'énoncé, la différence de potentiel  $V_P - V_Q$  existant entre les points  $P$  et  $Q$ .
3. *Troisième cas* : le cadre est immobile, l'interrupteur ( $K$ ) est fermé et le courant d'intensité  $i_1$  varie, au cours du temps, selon la loi :  $i_1(t) = I_m \sin(\omega_1 t)$  (courant sinusoïdal, de pulsation  $\omega_1$ ). Le régime est permanent.
  - (a) Déterminer l'intensité  $i_2(t)$  du courant induit dans le cadre.
  - (b) Tracer, sur le même graphe, l'allure des courbes représentatives des fonctions  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .
4. *Quatrième cas* : le courant  $i_1 = I_1$  est constant et positif, et l'interrupteur ( $K$ ) est fermé. Le cadre est mis en mouvement <sup>1</sup>, mais il demeure dans un plan contenant l'axe  $z$ , le côté

1. Ce mouvement est causé par un opérateur qui ne lâche pas le circuit.

$AB$  restant parallèle à cet axe. Déterminer la f.e.m. induite  $e$  dans le cadre, dans les deux situations suivantes :

- (a) la distance  $d$  est constante. Le mouvement est un mouvement de rotation uniforme, de pulsation  $\omega_2$  autour de l'axe  $z$ .
- (b) la distance  $d$  varie maintenant au cours du temps, selon la loi :  $d(t) = d_0 + vt$  (où  $d_0$  et  $v$  sont des constantes positives) : le cadre s'écarte de l'axe  $z$  à la vitesse  $v$ , dans un mouvement rectiligne de translation uniforme.

### 3 A propos de la résonance magnétique nucléaire (RMN)

La résonance magnétique nucléaire RMN est une technique non destructive de visualisation en coupes des tissus organiques mous, en les laissant intacts. Elle utilise un champ magnétique intense permanent  $\vec{B}_0$  combiné avec un faible champ magnétique perturbateur oscillant. L'interaction de ces champs avec le moment magnétique d'une particule élémentaire (proton) engendre un comportement dynamique qui fournit des renseignements sur la nature et l'état des tissus organiques.

Données :

Masse de l'électron	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C
Rapport gyromagnétique du proton	$\gamma_p = 2,67 \cdot 10^8$ C.kg <sup>-1</sup>
Constante de Planck réduite	$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ J.s
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m <sup>-1</sup>

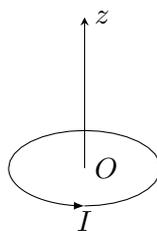
Formulaire :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{a} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{a} - \vec{\Delta} \vec{a} \quad \text{et} \quad \vec{\Delta} \vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial z^2}$$

Dans tout le problème, le référentiel d'étude du laboratoire, de repère d'espace ( $Oxyz$ ), est supposé galiléen.

#### I. Rapports gyromagnétiques

**Q1.** Définir le vecteur moment magnétique  $\vec{m}$  associé à une boucle circulaire de courant de rayon  $R$  et d'axe de révolution  $Oz$ , parcourue par une intensité  $I$ . On note  $\vec{e}_z$  le vecteur unitaire de l'axe  $Oz$ . Le sens de rotation directe autour de l'axe  $Oz$  est le sens d'orientation du courant dans la spire.



Une boucle de courant est créée par un électron dans son mouvement orbital autour du noyau atomique (de charge électrique  $Ze$ ) supposé fixe en  $O$ . On considère que l'électron, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m_e$ , possède une orbite circulaire de rayon  $r_B$  et de centre  $O$ , contenue dans le plan  $Oxy$ , tournant dans le sens inverse du courant, et qu'il n'est soumis qu'à la force électrique exercée par le noyau, qui s'écrit :

$$\vec{F}_{el} = - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$$

**Q2.** a) Montrer que la norme  $v$  de la vitesse de l'électron est constante.  
 b) On appelle  $T$  la période de révolution de l'électron sur son orbite. Exprimer le moment magnétique  $\vec{m} = m \vec{e}_z$  associé à cette boucle microscopique de courant en fonction du rayon  $r_B$ , de la charge élémentaire  $e$  et de  $T$ , puis en fonction de  $r_B$ ,  $v$  et  $e$ .

- c) Exprimer le moment cinétique  $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$  de l'électron par rapport au point  $O$  en fonction des mêmes paramètres.
- d) En déduire le rapport gyromagnétique  $\gamma_e$ , défini par  $\vec{m} = \gamma_e \vec{L}_O$  en fonction des constantes fondamentales et calculer la valeur numérique de ce rapport.

*Le même type de relation entre le moment cinétique et le moment magnétique existe pour les protons. Dans une description classique, on assimile le proton à une boule chargée en rotation autour de l'un de ses diamètres. Le proton est donc considéré comme un petit solide en rotation autour d'un axe avec un vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  et il possède de ce fait un moment cinétique  $\vec{S} = J \vec{\Omega}$  où  $J$  est le moment d'inertie par rapport à cet axe.*

- Q3.** Expliquer pourquoi une boule chargée, en rotation autour d'un axe passant par son centre, est elle aussi caractérisée par un moment magnétique dont on précisera la direction et le sens (on ne demande pas le calcul du moment mais seulement la justification de son existence).

*Il est donc possible d'associer au proton un moment magnétique  $\vec{m}$  qui est relié au moment cinétique  $\vec{S}$  par :  $\vec{m} = \gamma_p \vec{S}$  où  $\gamma_p$  est le rapport gyromagnétique du proton<sup>2</sup>.*

- Q4.** La mécanique quantique indique que la norme de  $\vec{S}$  vaut  $\hbar/2$  où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. Calculer la valeur numérique de  $\|\vec{m}\|$  pour le proton.

## II. Dipôles magnétiques

Soit un dipôle magnétique de moment  $\vec{m}$  placé en  $O$  dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . On rappelle les expressions de l'énergie potentielle  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$  et du couple (moment de forces)  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$ .

- Q5.** Définir un dipôle magnétique.
- Q6.** Quelles sont les deux positions d'équilibre d'un dipôle magnétique dans ce champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B}_0$ . Préciser les valeurs associées de l'énergie potentielle. Quelle position d'équilibre est stable ?
- Q7.** Évaluer la différence d'énergie en eV entre les deux configurations d'équilibre si le dipôle magnétique est un proton, soumis à un champ magnétique de 1 T (ordre de grandeur typique en RMN).

---

2. Dans la théorie quantique, ce moment cinétique est une grandeur quantifiée qui correspond au spin du proton.

### Précession d'un dipôle magnétique.

La précession est le nom donné au changement graduel d'orientation d'un vecteur qui décrit un cône dont l'axe est la direction de précession. Ce cône est parcouru à vitesse constante dans un sens donné.

Le dipôle magnétique placé en  $O$  est un proton en rotation autour d'un de ses diamètres, de moment cinétique  $\vec{S}$ . On écarte son moment magnétique d'un angle  $\alpha$  par rapport à la position d'équilibre stable dans  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ .

- Q8.** En appliquant le théorème du moment cinétique, écrire l'équation différentielle caractéristique de l'évolution du moment magnétique  $\vec{m}$  sous la forme :

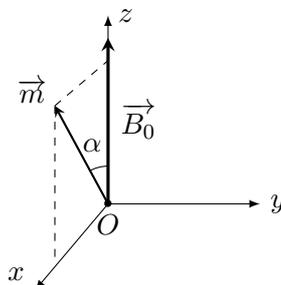
$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{m}$$

en précisant ce que vaut  $\vec{\omega}_0$ .

- Q9.** Montrer que  $\|\vec{m}\|$  est une constante. On appellera  $m_0$  cette constante par la suite. Montrer que  $m_z = \vec{m} \cdot \vec{e}_z$  est une constante. En déduire la constance de l'angle  $\alpha$  entre  $\vec{m}$  et  $\vec{e}_z$  ( $\alpha$  est compris entre 0 et  $\pi$ ).

Dans la suite, on posera :  $\vec{m} = m_x \vec{e}_x + m_y \vec{e}_y + m_z \vec{e}_z$ .

- Q10.** a) Établir les équations différentielles vérifiées par  $m_x$  et  $m_y$ .  
b) En donner la solution sachant qu'à l'instant  $t = 0$  on suppose que le moment magnétique est dans la configuration donnée sur la figure ci-dessous :



- c) Montrer que l'extrémité du vecteur  $\vec{m}_\perp = m_x \vec{e}_x + m_y \vec{e}_y$  décrit un cercle dans le plan  $Oxy$  dont on précisera le rayon. À quelle vitesse angulaire ce cercle est-il parcouru ? Quel est le sens de parcours sur ce cercle ?

### III. La relaxation de l'aimantation

Dans la technique de résonance magnétique nucléaire (RMN) on étudie un échantillon de matière (tissu organique mou) de petites dimensions, qui est placé dans un champ magnétique uniforme et permanent  $\vec{B}_0$  très intense (de l'ordre de 1T). Les molécules de l'échantillon contiennent des atomes d'hydrogène  $H$  dont les noyaux (protons) sont assimilés à des dipôles magnétiques de moments individuels  $\vec{m}_i$ .

Il n'est pas possible d'étudier le comportement individuel d'un seul moment magnétique et seule une étude d'ensemble peut être menée. Dans la suite, nous désignerons par  $\vec{M}$  la somme des moments magnétiques individuels des noyaux d'hydrogène de l'échantillon :

$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i$$

que nous appellerons **vecteur aimantation**.

En l'absence de  $\vec{B}_0$ , les vecteurs moments dipolaires magnétiques des noyaux d'hydrogène sont répartis dans toutes les directions et  $\vec{M} = \vec{0}$ . Par contre, en présence d'un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_0$ , les différents  $\vec{m}_i$  auront tendance à s'aligner sur ce champ, ce qui créera une aimantation non nulle.

Il est très difficile de réaliser une étude théorique détaillée de l'aimantation à partir des moments magnétiques individuels car les noyaux d'hydrogène interagissent entre eux et aussi avec les autres atomes et électrons présents dans l'échantillon de matière. Seules des lois phénoménologiques, liées à l'expérience, peuvent être formulées. Elles sont expliquées dans les documents 1, 2 et 3 données en fin d'énoncé et auxquels on se reportera pour aborder la suite du problème.

**Q11.** On suppose pour simplifier l'étude qu'à l'instant  $t = 0$ , juste après l'impulsion radiofréquence, l'aimantation vaut  $\vec{M}(t = 0) = -M_0 \vec{e}_y$ .

- Projeter l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{M}$  pour obtenir celle vérifiée par  $M_z$ .
- Résoudre cette dernière équation différentielle à l'aide de la condition initiale donnée.

**Q12.** Obtention de  $\vec{M}_\perp$  :

- Donner l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{M}_\perp$ .
- En posant  $\vec{M}_\perp = \vec{M}_\perp e^{t/T_2}$ , montrer que :

$$\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}_\perp$$

- En déduire que la solution est :

$$\vec{M}_\perp = -M_0 e^{-t/T_2} [\sin(\omega_0 t) \vec{e}_x + \cos(\omega_0 t) \vec{e}_y]$$

Tracer l'évolution de  $M_\perp = \|\vec{M}_\perp\|$  en fonction du temps. Est-ce conforme aux résultats expérimentaux ?

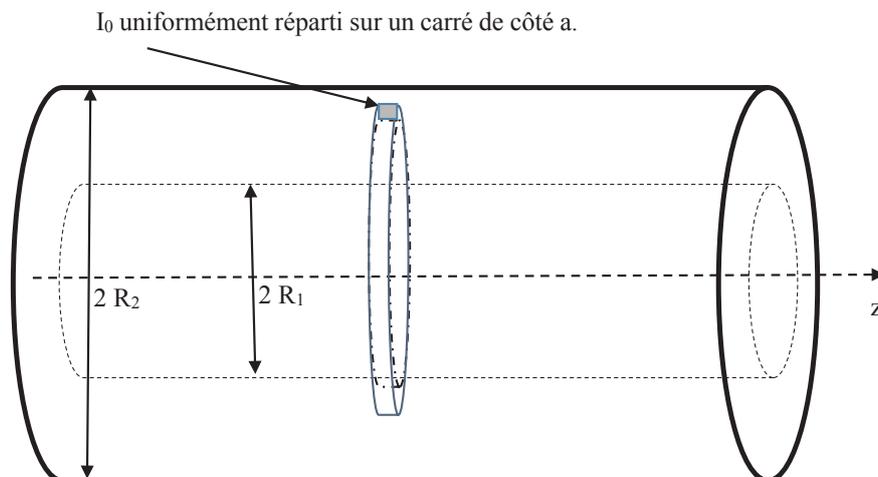
#### IV. Production d'un champ magnétique intense $\vec{B}_0$ .

On utilise un solénoïde "épais" (épaisseur  $e = R_2 - R_1$ ) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur  $L \gg R_2$ ) de même axe  $Oz$ . Il est réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté  $a = 1,0$  mm, enroulées sur un cylindre de longueur  $L = 4,0$  m, depuis un rayon  $R_1 = 20$  cm jusqu'à un rayon  $R_2 = 25$  cm. Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu  $I_0$  uniformément réparti à travers chaque section carrée, orienté dans le sens direct autour de  $Oz$ . La situation est schématisée sur la figure ci-dessous. Les sections carrées sont dans les plans  $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$  c'est-à-dire en positionnement radial.

**Q13.** Calculer le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  auquel cette distribution de courant est équivalente, pour  $R_1 < r < R_2$ .

**Q14.** Le champ magnétique étant supposé nul pour  $r > R_2$ , établir que l'expression du champ sur un point tel que  $r < R_1$  vaut :

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \frac{I_0}{a^2} (R_2 - R_1) \vec{e}_z$$



**Q15.** Quelle est l'intensité nécessaire pour engendrer un champ de 1 T ?

*Pour obtenir un champ intense sans problème d'échauffement on utilise des matériaux supraconducteurs qui perdent totalement leur résistivité en dessous d'une température critique  $T_C$ , qui dépend du champ magnétique. Ces matériaux ont des propriétés magnétiques intéressantes : en régime stationnaire, ils "expulsent" le champ magnétique. Dans le cadre médical, on utilise des supraconducteurs durs, pour lesquels  $T_C < 133$  K pour  $B > 0,2$  T.*

*On admettra dans ce qui suit que la loi constitutive de certains supraconducteurs est  $\text{rot } \vec{j} = -\Lambda \vec{B}$  où  $\vec{j}$  et  $\vec{B}$  sont respectivement la densité de courant et le champ magnétique en chaque point du corps supraconducteur. Dans cette loi,  $\Lambda$  est une constante positive.*

**Q16.** Quelle est l'unité de  $\Lambda$  ?

**Q17.** En supposant qu'on peut appliquer les équations de Maxwell dans le matériau supraconducteur de perméabilité  $\mu_0$  et de permittivité  $\varepsilon_0$ , exprimer grâce à une formule d'analyse vectorielle l'équation du second ordre à laquelle obéit le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en régime permanent. La mettre sous la forme :

$$\Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\delta^2} = \vec{0}$$

Quelle est la dimension de la grandeur  $\delta$  ?

*On considère qu'un supraconducteur de ce type occupe le demi-espace  $x < 0$  et que les sources du champ sont telles que règne dans l'espace extérieur  $x \geq 0$  un champ permanent uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . La modélisation de la distribution de courant est volumique et n'introduit donc pas de discontinuités spatiales du champ magnétique.*

**Q18.** En utilisant les invariances du problème, montrer que le champ dans le supraconducteur s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}(M) = B_x(x) \vec{e}_x + B_y(x) \vec{e}_y + B_z(x) \vec{e}_z$$

**Q19.** Donner l'expression de ce champ  $\vec{B}(M)$  régnant dans le supraconducteur. En déduire la densité de courant  $\vec{j}$ .

- Q20.** L'ordre de grandeur du paramètre  $\delta$  est de  $5.10^{-8}$  m. Commenter.
- Q21.** Tracer sans faire de calculs l'allure de  $B_z(r)$  dans une symétrie cylindrique où le supraconducteur occupe le volume d'un cylindre creux d'épaisseur  $e = R_2 - R_1 \gg \delta$ , de longueur  $L$  très grande devant son rayon  $R_2$ . On suppose que le champ vaut  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  dans l'espace intérieur au cylindre creux.

## V. La RMN pulsée

Pour faire basculer l'aimantation dans le plan  $Oxy$  avant de pouvoir étudier sa relaxation vers l'équilibre, on applique un champ magnétique radiofréquence oscillant à la pulsation  $\omega$ . Ce champ magnétique est en fait un champ uniforme et tournant, de la forme :

$$\vec{B}_1(t) = B_1 (\cos(\omega t) \vec{e}_x - \sin(\omega t) \vec{e}_y)$$

où  $B_1 > 0$  est constant. Le champ magnétique total est donc :

$$\vec{B} = B_1 (\cos(\omega t) \vec{e}_x - \sin(\omega t) \vec{e}_y) + B_0 \vec{e}_z$$

Dans toute la suite du problème on posera :  $\omega_1 = \gamma_p B_1$  et  $\omega_0 = \gamma_p B_0$ .

- Q22.** L'origine de  $\vec{B}_1$  étant supposée placée en  $O$ , montrer que son extrémité décrit un cercle dont on précisera le rayon et le sens de parcours.
- Q23.** Écrire l'équation différentielle de l'évolution du vecteur aimantation dans le référentiel  $R_0$  du laboratoire *en négligeant les phénomènes de relaxation*.

On appelle  $R_1$  le référentiel "tournant" dans lequel le champ  $\vec{B}_1$  est un champ statique. La base orthonormée liée à ce référentiel tournant est  $(\vec{e}_1 = \vec{B}_1(t)/B_1, \vec{e}_2 = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ . On rappelle la loi de dérivation vectorielle d'un vecteur  $\vec{U}$  lors d'un changement de référentiel :

$$\left( \frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{R_1} + \vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{U}$$

- Q24.** Expliciter le vecteur rotation  $\vec{\omega}(R_1/R_0)$  du référentiel tournant  $R_1$  par rapport au référentiel du laboratoire  $R_0$ .
- Q25.** Écrire l'équation différentielle de l'évolution du vecteur aimantation  $\vec{M}$  dans le référentiel tournant  $R_1$  en négligeant toujours les phénomènes de relaxation. Montrer que dans ce référentiel  $R_1$  on peut écrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$\left( \frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R_1} = \gamma_p \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{eff}}$$

où le champ magnétique "effectif"  $\vec{B}_{\text{eff}}$  est un champ statique dont on donnera l'expression en fonction de  $\gamma_p, \omega, \omega_0, \omega_1, \vec{e}_1$  et  $\vec{e}_z$ . Faire un dessin de représentation du vecteur  $\vec{B}_{\text{eff}}$  avec ses composantes dans  $R_1$ .

- Q26.** Décrire le mouvement de l'aimantation dans ce référentiel tournant. Une réponse qualitative est attendue, sans aucun calcul.
- Q27.** Si on tient compte maintenant des temps de relaxation  $T_1$  et  $T_2$ , décrire sans calculs vers quelle valeur tend l'aimantation dans le référentiel  $R_1$  ? On supposera qu'initialement,  $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ .

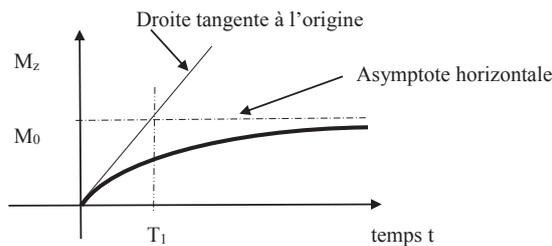
- Q28.** Comment est-il possible de faire "basculer" l'aimantation  $\vec{M}$  dans le plan  $Oxy$ ? Quelle pulsation  $\omega$  faut-il choisir? Faire l'application numérique avec  $B_0 = 1\text{T}$ . Quelle est alors la fréquence  $f$  du champ magnétique oscillant? Pourquoi appelle-t-on ce phénomène résonance?

*À partir d'une situation initiale, dans laquelle l'aimantation est en équilibre stable sous l'effet du champ permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ , on applique le champ radiofréquence  $\vec{B}_1(t)$  à un instant choisi comme origine  $t = 0$ . On supprime ensuite ce champ oscillant à un instant  $t_1$ .*

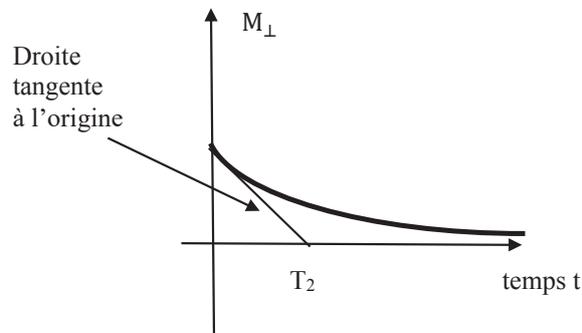
- Q29.** Quel est l'ordre de grandeur de la durée  $t_1$  pendant laquelle on doit appliquer  $\vec{B}_1$  pour obtenir un basculement de  $\vec{M}$  dans le plan  $Oxy$ ?

**Document 1**a) Temps de relaxation longitudinale  $T_1$ 

Quand on applique un champ magnétique  $\vec{B}_0$  sur la direction  $Oz$ , l'aimantation n'atteint pas sa valeur d'équilibre instantanément : elle augmente alors de la valeur initiale  $M_z = 0$  à la valeur d'équilibre  $M_z = M_0$  en un certain temps. On observe que  $M_z$  croît exponentiellement avec le temps vers  $M_0$  avec un temps caractéristique  $T_1$ , appelé temps de relaxation longitudinale :

b) Temps de relaxation transversale  $T_2$ 

Supposons qu'à l'instant  $t = 0$ , l'échantillon présente une aimantation transversale  $M_{\perp}$  dans le plan  $xOy$  orthogonal à  $Oz$ . Alors  $M_{\perp}$  doit tendre vers 0, avec un temps caractéristique  $T_2$ , car à l'équilibre, les composantes transversales de l'aimantation sont nulles.  $T_2$  est appelé temps de relaxation transversale et est toujours inférieur à  $T_1$ .



**Document 2 : équations de Bloch <sup>a</sup>**

Les équations différentielles couplées qui régissent l'évolution de l'aimantation sont appelées équations de Bloch. Elles permettent de décrire le comportement de l'aimantation en fonction du temps et en présence d'un champ magnétique permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . En posant  $\vec{\omega}_0 = -\omega_0 \vec{e}_z$  avec  $\omega_0 = \gamma_p B_0 > 0$  qui est appelée pulsation de précession (ou pulsation de Larmor), ces équations de Bloch s'écrivent :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M} - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} - \frac{M_z - M_0}{T_1} \vec{e}_z$$

avec  $\vec{M} = \vec{M}_\perp + M_z \vec{e}_z$ , où  $\vec{M}_\perp = M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y$ .

Ainsi, le mouvement de  $\vec{M}$  est la superposition d'un mouvement de précession décrit par le terme  $\vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}$  et de termes d'amortissement décrivant les relaxations longitudinale et transversale.

<sup>a</sup>. les premières études de RMN ont été réalisées indépendamment en 1945-6 par Félix Bloch et Edward Mills Purcell, qui ont reçu le prix Nobel de physique en 1952.

**Document 3**

Le temps de relaxation  $T_1$  dépend de l'intensité du champ magnétique principal  $B_0$ . Le temps  $T_2$  en est indépendant. Ils dépendent de la nature des tissus comme l'indique le tableau de valeurs ci-dessous. Les tissus cancéreux ont une décroissance  $T_2$  plus lente que celle des tissus sains.

Champ magnétique $B_0$	1 T	1,5 T	
Tissus	$T_1$ (en ms)	$T_1$ (en ms)	$T_2$ (en ms)
Liquide céphalo-rachidien	2500	3000	200
Graisse	180	200	90
Substance blanche	500	750	90
Substance grise	350	500	75

Source : Guide des technologies de l'imagerie médicale et de la radiothérapie, JP Dillenseger, E Moerschel, Masson, 2009.

$T_1$  et  $T_2$  permettent d'obtenir de précieuses informations sur les tissus organiques. Afin de les mesurer, on utilise actuellement la méthode qui consiste à mettre l'aimantation hors d'équilibre, puis à déterminer les temps de relaxations longitudinale et transversale : c'est la RMN pulsée.

Avec cette technique, on fait "basculer" rapidement l'aimantation sur le plan  $Oxy$  grâce à un champ magnétique oscillant dans le domaine des radiofréquences. Lors de ce basculement, la norme de  $\vec{M}$  est conservée.