

MP2 - Correction - DS 4 (sujet unique)

1 Simulation du dosage de l'acide citrique

- 1) 1 : courbe du pH
 2 : A^{3-} (espèce la plus basique, lors de l'ajout de beaucoup de soude)
 3 : HA^{2-}
 4 : H_2A^-
 5 : H_3A → on notera que la première acidité n'est pas forte puisque H_3A existe dans l'eau et n'est pas totalement dissocié (et même loin de là puisque pour $V=0$, il y a environ 80% de H_3A).

- 2) Au moment de l'équivalence, pour $V_{eq} = 180 \text{ mL}$, les 3 acidités ont été dosées en même temps, de sorte que :

$$n_{\text{base versée}} = n_{\text{acide initialement présent}} = 3 n_{H_3A \text{ initialement présent}}$$

$$\text{soit } c_B V_{eq} = 3c V_0 \Rightarrow c = \frac{c_B V_{eq}}{3V_0} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \times 18 \cdot 10^3}{3 \cdot 20 \cdot 10^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 0,015 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

- 3) les pK_{A_i} peuvent être obtenus à partir de la formule :

$$pH = pK_A + \log \frac{[base]}{[acide]} \quad \rightarrow \text{donc lorsque } [base] = [acide], \text{ on peut lire directement } pK_A = pH.$$

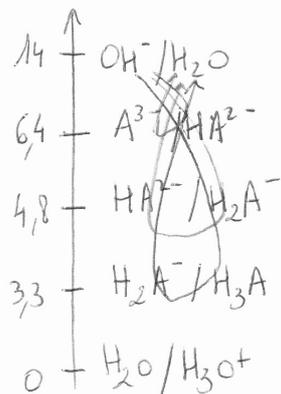
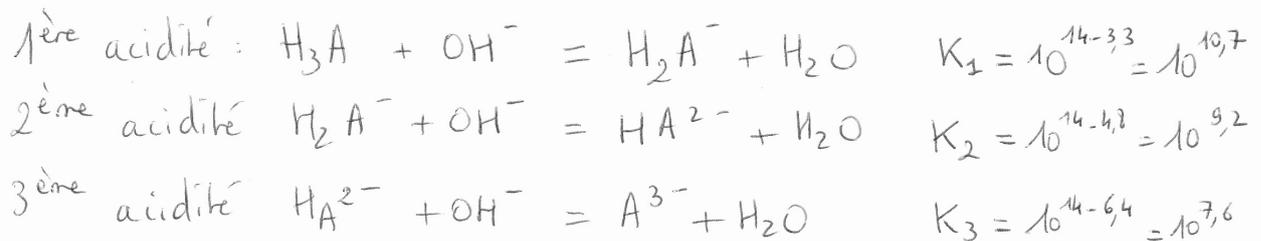
d'où, par lecture directe :

$$pK_{A_1} (H_3A/H_2A^-) = 3,3$$

$$pK_{A_2} (H_2A^-/HA^{2-}) = 4,8$$

$$pK_{A_3} (HA^{2-}/A^{3-}) = 6,4$$

- 4) Il n'y a qu'un seul saut de pH, c'est à dire que les 3 acidités sont dosées en même temps, ce qui est cohérent avec les valeurs de pK_A qui ne sont pas tels que $\Delta pK_A > 3$.



Les constantes de réaction peuvent être déterminées directement avec le schéma ci contre, à partir de l'écart entre les pK_A .

Les 3 constantes sont bien $\gg 1$, conformément aux réactions de dosage.

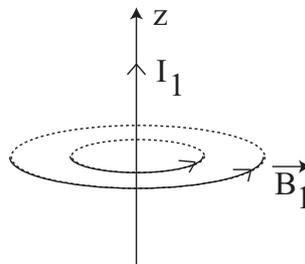
2 Phénomènes d'induction électromagnétique

I Flux du vecteur champ magnétique

1. L'analyse des symétries et des invariances, puis l'application du théorème d'Ampère sur un cercle centré sur le fil, perpendiculaire à celui-ci, et de rayon r permet de montrer que, pour $r > 0$:

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

2. Les lignes de champ magnétique sont des cercles concentriques centrés sur le fil, perpendiculaire à celui-ci, et s'enroulant autour du fil dans le sens trigonométrique.



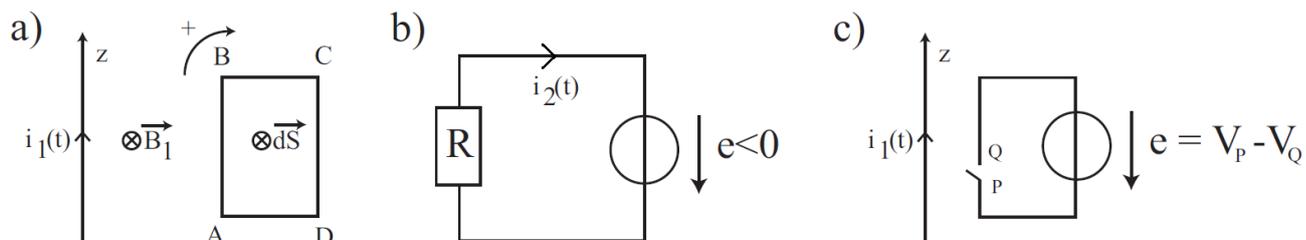
3. Le flux du champ magnétique créé par le fil à travers le cadre rectangulaire orienté dans le sens ABCD vaut :

$$\phi_1 = \iint_{ABCD} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{ABCD} B_1 \vec{u}_\theta \cdot dz dr \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 i_1 L}{2\pi} \int_d^{d+\ell} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i_1 L}{2\pi} \ln \left(\frac{d+\ell}{d} \right)$$

Le flux est donc positif avec cette orientation du circuit.

II Force électromotrice et courants induits

1. La f.e.m. est nulle car $\Phi_1 = cste$ et donc $e = -\frac{d\Phi_1}{dt} = 0$.
2. Ce deuxième cas correspond au cas de Neumann.
 - (a) L'orientation du circuit selon ABCD impose le sens de i_2 , de e et de $\vec{dS}_{orienté}$, comme le montrent les schémas a) et b) ci-dessous.



Calculons tout d'abord la f.e.m. induite dans le circuit en utilisant la loi de Faraday (avec cette orientation, le calcul du flux est bien dans le bon sens par rapport au I , avec $\vec{dS}_{orienté}$ selon \vec{u}_θ) :

$$e = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{\mu_0 a L}{2\pi} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

L'application de la loi d'Ohm dans le circuit équivalent de la figure b) constitué du générateur idéal de tension et d'une résistance R nous donne : $e = Ri_2$, et on obtient finalement :

$$i_2 = -\frac{\mu_0 a L}{2\pi R} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

Le courant est négatif. Essayons de retrouver cette propriété avec la loi de Lenz, sachant que le courant induit doit générer un champ magnétique induit qui doit s'opposer à la variation du flux à travers le circuit. Comme i_1 augmente au cours du temps ($a > 0$), ϕ_1 augmente, et donc \vec{B}_{induit} selon $-\vec{u}_\theta$ (on rappelle que \vec{B}_{induit} ne s'oppose pas toujours à \vec{B} , par exemple dans le cas où le courant i_1 diminuerait, \vec{B}_{induit} et \vec{B} seraient dans le même sens). On retrouve bien que cela est cohérent avec un courant $i_2 < 0$ selon ABCD (ou un courant positif dans le sens DCBA).

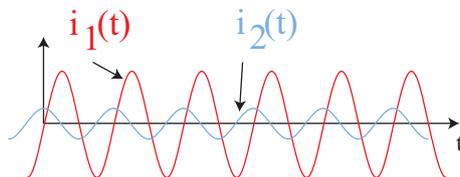
- (b) Lorsque l'interrupteur est ouvert, aucun courant ne circule dans le circuit ; cependant, la présence du champ magnétique variable donne toujours lieu à un champ électromoteur identique dont la circulation n'a pas changé par rapport au cas précédent varié puisqu'on néglige la taille de l'interrupteur. Il existe donc une différence de potentiel entre les points P et Q identique à la f.e.m. calculée précédemment. En utilisant l'orientation précédemment choisie pour la f.e.m. (Fig.2c), on obtient directement :

$$V_P - V_Q = e = -\frac{\mu_0 a L}{2\pi} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right) < 0$$

3. (a) De la même façon que précédemment, on obtient avec i_2 orienté dans le sens horaire :

$$i_2 = -\frac{\mu_0 I_m L \omega_1 \cos(\omega_1 t)}{2\pi R} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

- (b) Les courbes $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont en quadrature de phase, avec i_2 d'amplitude nécessairement plus faible que i_1 (attention, c'est l'opposé de i_2 qui est représenté ici...



4. Ce dernier cas correspond au cas de Lorentz.

- (a) La fem d'induction est nulle dans ce cas d'après la loi de Faraday, car le flux du champ magnétique est inchangé à tout instant.

On peut également s'en convaincre en se plaçant dans le référentiel du cadre mobile : le champ \vec{B}_1 étant invariant par rotation d'angle θ autour de l'axe z , le champ perçu par le circuit est invariant.

- (b) Calculons la f.e.m. induite dans le circuit en utilisant la loi de Faraday, le circuit étant toujours orienté dans le sens horaire ABCD :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 i_1 L d}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_{d_0+vt}^{d_0+\ell+vt} \frac{dr}{r} \right] = \frac{\mu_0 i_1 v L}{2\pi} \frac{\ell}{(d_0 + vt)(d_0 + \ell + vt)}$$

On trouve que la f.e.m. est positive lorsqu'elle est orientée dans le sens de ABCD, et le courant induit est également dirigé dans le sens horaire, contrairement aux cas étudiés précédemment. En effet, dans le II.2, le flux augmentait alors qu'il diminuait ici au cours de l'éloignement du circuit.

3 A propos de la résonance magnétique nucléaire (RMN)

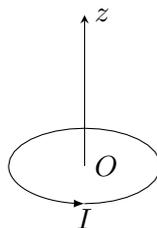
I. Rapports gyromagnétiques

- Q1.** Le contour définissant la spire étant orienté, le vecteur surface obéit à la règle de la main droite :

$$\vec{S} = \pi R^2 \vec{e}_z$$

Le moment magnétique de la spire est le produit de \vec{S} par l'intensité I du courant qui traverse la spire.

$$\vec{m} = I \vec{S} = I \pi R^2 \vec{e}_z$$



- Q2.** a) Le mouvement étant circulaire ($r = \text{Cste}$), le vecteur vitesse s'écrit en coordonnées polaires $\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$. La puissance de la force $\vec{F}_{\text{él}}$ est donc nulle puisque :

$$\vec{F}_{\text{él}} \cdot \vec{v} = 0$$

D'après le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_{\text{él}} \cdot \vec{v} = 0$$

ce qui montre que l'énergie cinétique est conservée et donc que la norme de la vitesse est une constante.

- b) En assimilant la trajectoire de l'électron à une boucle de courant microscopique parcourue par un courant $I = e/T$ (l'électron tourne dans le sens inverse du courant, ce qui explique que ce dernier soit positif), on peut associer à l'électron un moment magnétique :

$$\vec{m} = \frac{e}{T} \pi r_B^2 \vec{e}_z$$

Comme la norme de la vitesse est constante, on peut écrire que la circonférence du cercle vérifie l'équation :

$$2\pi r_B = \int_0^T v dt = vT \quad \text{donc} \quad v = \frac{2\pi r_B}{T}$$

d'où :

$$\vec{m} = -\frac{e}{2} v r_B \vec{e}_z$$

- c) Par définition du moment cinétique :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v} = m_e r_B v \vec{e}_r \wedge (-\vec{e}_\theta) = -m_e r_B v \vec{e}_z$$

- d) On en déduit que :

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_O = \gamma_e \vec{L}_O$$

et donc que :

$$\gamma_e = -\frac{e}{2m_e}$$

Application numérique : $\gamma_e = -8,8 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$.

- Q3.** Décomposons la boule en porteuse d'une charge totale q en petites charges élémentaires dq . Lorsque la boule est en rotation autour d'un diamètre OZ , chaque charge dq décrit un cercle autour de OZ et crée un moment magnétique dirigé dans la direction du vecteur \vec{e}_z si $dq > 0$ et $-\vec{e}_z$ si $dq < 0$. Si on considère que le moment magnétique total \vec{m} de la boule est la somme des moments magnétiques de chaque charge dq , alors \vec{m} sera colinéaire à \vec{e}_z .

- Q4.** Nous obtenons : $\|\vec{m}\| = \gamma_p \hbar/2$. Application numérique : $\|\vec{m}\| = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

II. Dipôles magnétiques

- Q5.** Il s'agit d'un système physique caractérisé par un moment magnétique \vec{m} non nul et dont la taille caractéristique ℓ est très petite devant la distance où on observe son champ magnétique créé

Q6. Rappelons que lorsque le champ magnétique d'origine extérieure \vec{B}_0 est uniforme, la résultante des forces magnétiques exercées sur le dipôle est nulle : il ne reste que le moment résultant de ces forces (couple).

Les positions d'équilibre correspondent à $\vec{\Gamma} = \vec{0}$, c'est à dire à \vec{m} dans le même sens que \vec{B}_0 ou \vec{m} en sens opposé à \vec{B}_0 . Dans le premier cas l'énergie potentielle vaut $E_p(1) = -\|\vec{m}\|B_0$ et dans l'autre cas elle vaut $E_p(2) = +\|\vec{m}\|B_0$.

La position d'équilibre stable correspond à la plus petite valeur de E_p : c'est donc la première configuration.

Q7. La différence d'énergie vaut : $\Delta E_p = 2\|\vec{m}\|B_0$. Application numérique : $\Delta E_p = 2,8 \cdot 10^{-26}$ J = $1,7 \cdot 10^{-7}$ eV (on rappelle qu'un eV est égal à $1,6 \cdot 10^{-19}$ J).

C'est une très petite énergie comparée à celle des électrons dans les atomes par exemple qui est de l'ordre de quelques eV ou à celle des interactions (fortes) entre les nucléons du noyau atomique qui est de l'ordre de quelques centaines de MeV (méga électron-volts).

Précession d'un dipôle magnétique.

Q8. En supposant que les seules forces qui agissent sont les forces magnétiques, nous avons (TMC) :

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$$

En multipliant cette équation par γ_p , il vient :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma_p \vec{B}_0 \wedge \vec{m} \quad (1)$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\omega}_0 = -\gamma_p \vec{B}_0}$$

Du point de vue des dimensions, ω_0 est homogène à l'inverse d'un temps : il s'agit d'une pulsation, appelée pulsation de précession ou encore pulsation de Larmor.

Q9. Considérons le produit scalaire de l'équation précédente par \vec{m} . Nous obtenons :

$$\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m} \cdot (\vec{m} \wedge \vec{B}_0) = 0$$

et comme :

$$\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{m} \cdot \vec{m})}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\|\vec{m}\|^2}{dt}$$

il vient :

$$\boxed{\frac{d\|\vec{m}\|^2}{dt} = 0 \iff \|\vec{m}\| = \text{Cste}}$$

Considérons maintenant le produit scalaire de l'équation précédente par \vec{e}_z . Puisque $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ et que \vec{e}_z est un vecteur constant, il vient :

$$\vec{e}_z \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{d(\vec{e}_z \cdot \vec{m})}{dt} = \vec{e}_z \cdot (\vec{m} \wedge \vec{B}_0) = 0$$

et donc :

$$\boxed{\vec{e}_z \cdot \vec{m} = m_z = \text{Cste}}$$

En utilisant les deux expressions équivalentes du produit scalaire, on en déduit que :

$$\vec{m} \cdot \vec{B}_0 = m_z B_0 = \|\vec{m}\| B_0 \cos \alpha = \text{Cste}$$

ce qui montre que $\cos \alpha$ reste constant au cours du mouvement et donc que α reste constant. Ceci montre que le vecteur \vec{m} décrit un cône de demi-angle au sommet α .

Q10. a) Projetons l'équation (1) sur la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{m}_x &= \gamma_p B_0 m_y \\ \dot{m}_y &= -\gamma_p B_0 m_x \end{cases}$$

En dérivant la première équation par rapport au temps et en y remplaçant \dot{m}_y , il vient :

$$\ddot{m}_x = \gamma_p B_0 \dot{m}_y = -(\gamma_p B_0)^2 m_x$$

Par la suite, nous poserons : $\omega_0 = \|\vec{\omega}_0\| = \gamma_p B_0 > 0$. On obtient alors :

$$\boxed{\ddot{m}_x + \omega_0^2 m_x = 0}$$

ce qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 . Une équation similaire est vérifiée par m_y .

b) Nous avons :

$$m_x(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t)$$

En observant la configuration du moment magnétique à $t = 0$, on voit que $m_x(0) = m_0 \sin \alpha$ et que $\dot{m}_x(0) = \omega_0 m_y(0) = 0$. On en déduit que $\lambda = m_0 \sin \alpha$ et $\mu = 0$ et donc :

$$\boxed{m_x(t) = m_0 \sin \alpha \cos(\omega_0 t)}$$

puis :

$$\begin{aligned} \dot{m}_y &= -\gamma_p B_0 m_x = -\omega_0 m_0 \sin \alpha \cos(\omega_0 t) \\ \implies m_y(t) &= -m_0 \sin \alpha \sin(\omega_0 t) + \text{Cste} \end{aligned}$$

Comme $m_y(0) = 0$, la constante d'intégration est nulle et nous obtenons :

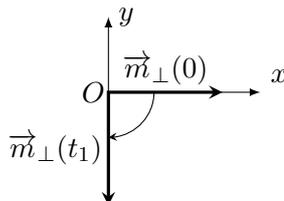
$$\boxed{m_y(t) = -m_0 \sin \alpha \sin(\omega_0 t)}$$

c) On a :

$$m_x^2 + m_y^2 = (m_0 \sin \alpha)^2$$

ce qui montre que l'extrémité du vecteur \vec{m}_\perp décrit un cercle de rayon $m_0 \sin \alpha$. La vitesse angulaire de parcours de ce cercle est ω_0 .

À l'instant $t = 0$, $\vec{m}_\perp(0) = m_0 \sin \alpha \vec{e}_x$ et à l'instant $t_1 > 0$ tel que $\omega_0 t_1 = \pi/2$, $\vec{m}_\perp(t_1) = -m_0 \sin \alpha \vec{e}_y$. On voit donc que le sens de parcours est le sens horaire.



III. La relaxation de l'aimantation

Q11. On suppose pour simplifier l'étude qu'à l'instant $t = 0$, juste après l'impulsion radiofréquence, l'aimantation vaut $\vec{M}(t = 0) = -M_0 \vec{e}_y$.

a) Le document 2 donne l'équation à projeter. On obtient :

$$\boxed{\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1} \iff \frac{dM_z}{dt} + \frac{M_z}{T_1} = \frac{M_0}{T_1}}$$

b) La solution est : $M_z(t) = A \exp(-t/T_1) + M_0$, avec $M_z(0) = 0$, ce qui conduit à :

$$\boxed{M_z(t) = M_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right]}$$

Q12. Obtention de \vec{M}_\perp :

a) La projection de l'équation du document 2 sur un plan orthogonal à \vec{e}_z conduit à :

$$\boxed{\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}_\perp - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}}$$

b) Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}_\perp}{dt} &= \frac{d\vec{M}_\perp}{dt} e^{t/T_2} + \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} e^{t/T_2} \\ &= \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}_\perp e^{t/T_2} - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} e^{t/T_2} + \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} e^{t/T_2} \\ &= \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}_\perp \end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé par l'énoncé.

c) Il s'agit de la même équation différentielle que celle qui était vérifiée à la question **Q8.** par \vec{m} . On en déduit les deux équations couplées :

$$\begin{cases} \dot{M}_{1x} = -\omega_0 M_{1y} \\ \dot{M}_{1y} = \omega_0 M_{1x} \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\ddot{M}_{1y} = -\omega_0^2 M_{1y}$$

et donc à :

$$M_{1y}(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t)$$

avec : $M_{1y}(0) = -M_0$ et $\dot{M}_{1y}(0) = \omega_0 M_{1x}(0) = 0$ et donc :

$$M_{1y}(t) = -M_0 \cos(\omega_0 t)$$

et

$$\dot{M}_{1x} = -\omega_0 M_{1y} = M_0 \cos(\omega_0 t) \implies M_{1x}(t) = M_0 \sin(\omega_0 t)$$

et, finalement :

$$\vec{M}_\perp(t) = \vec{M}_\perp e^{-t/T_2} = -M_0 e^{-t/T_2} [-\sin(\omega_0 t) \vec{e}_x + \cos(\omega_0 t) \vec{e}_y]$$

La norme de ce vecteur est donc : $M_\perp(t) = M_0 e^{-t/T_2}$, ce qui donne une décroissance exponentielle, avec une constante de temps T_2 , conforme à l'allure donnée sur le document 1.

IV. Production d'un champ magnétique intense \vec{B}_0 .

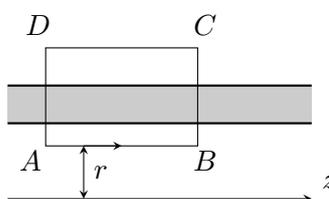
Q13. En supposant que la norme de \vec{j} soit uniforme, on doit avoir : $j a^2 = I_0$ et donc :

$$\vec{j} = \frac{I_0}{a^2} \vec{e}_\theta$$

pour $R_1 < r < R_2$ et $\vec{j} = \vec{0}$ sinon.

Q14. Soit $M(r, \theta, z)$ un point repéré par ses coordonnées cylindriques. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie des courant contenant M . Nous avons donc $\vec{B}_0(M) = B_0(r, \theta, z) \vec{e}_z$. Il y a de plus invariance de la distribution de courants par toute rotation autour de Oz et par toute translation le long de Oz , ce qui donne :

$$\vec{B}_0(M) = B_0(r) \vec{e}_z$$



Prenons comme contour d'Ampère (C_A) un rectangle $ABCD$ de longueur $AB = CD = \ell$ et tel que AB soit à une distance $r < R_1$ de l'axe Oz , tandis que CD soit à l'extérieur du solénoïde. Le théorème d'Ampère (en régime statique) conduit à :

$$\oint_{C_A} \vec{B}_0 \cdot d\vec{\ell} = \ell B_0(r) = \mu_0 j \ell (R_2 - R_1)$$

ce qui donne :

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \frac{I_0}{a^2} (R_2 - R_1) \vec{e}_z$$

Q15. A.N. : $I_0 = 16$ A, ce qui est une intensité très importante.

Q16. L'équation de Maxwell - Ampère, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, conduit à l'équation aux dimensions (ou L représente une longueur) :

$$\frac{[B]}{L} = [\mu_0] [j] \implies [B] = [\mu_0] L [j]$$

et donc :

$$\frac{[j]}{L} = [\Lambda] [B] = [\Lambda] [\mu_0] L [j]$$

d'où :

$$[\Lambda] = \frac{1}{[\mu_0] L^2} = H^{-1} \cdot m^{-1}$$

Q17. Partons de l'équation de Maxwell - Ampère et appliquons-lui le rotationnel. Il vient :

$$\text{rot } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \text{rot } \vec{j} = \mu_0 \Lambda \vec{B}$$

D'autre, part : $\text{rot } \text{rot } \vec{B} = \text{grad } \text{div } \vec{B} - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$, et donc :

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \Lambda \vec{B} = \vec{0}$$

d'où :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \Lambda}} \quad (2)$$

qui est homogène à une longueur.

Q18. Le problème est invariant par toute translation le long de Oy et de Oz ce qui conduit à l'indépendance de \vec{B} vis à vis des coordonnées y et z .

Q19. On projette l'équation (2) sur la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ pour obtenir les trois équations scalaires :

$$\frac{d^2 B_x}{dx^2} - \frac{B_x}{\delta^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 B_y}{dx^2} - \frac{B_y}{\delta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 B_z}{dx^2} - \frac{B_z}{\delta^2} = 0$$

dont les solutions sont :

$$B_x(x) = \lambda_x e^{-x/\delta} + \mu_x e^{x/\delta}$$

$$B_y(x) = \lambda_y e^{-x/\delta} + \mu_y e^{x/\delta}$$

$$B_z(x) = \lambda_z e^{-x/\delta} + \mu_z e^{x/\delta}$$

où $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \mu_x, \mu_y$ et μ_z sont six constantes. Comme \vec{B} ne doit pas diverger lorsque $x \rightarrow -\infty$, nous avons nécessairement : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$ et comme $B_x(0) = B_y(0) = 0$ et que $B_z(0) = B_0$, il vient : $\mu_x = \mu_y = 0$ et $\mu_z = B_0$. Cela conduit donc à :

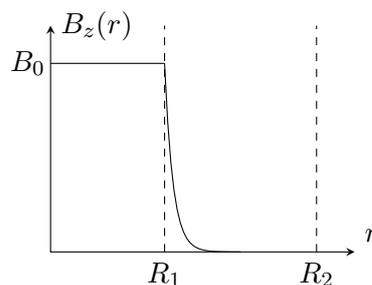
$$\forall x \leq 0, \quad B_x(x) = B_y(x) = 0 \quad \text{et} \quad B_z(x) = B_0 e^{x/\delta}$$

On en déduit :

$$\vec{j} = \frac{\text{rot } \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{dx} \vec{e}_y = -\frac{1}{\mu_0 \delta} B_0 e^{x/\delta} \vec{e}_y$$

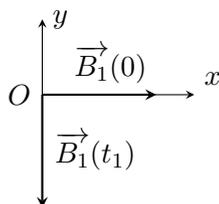
Q20. δ est une distance caractéristique d'atténuation de \vec{B} et de \vec{j} dans le supraconducteur. Au bout d'une distance de l'ordre de 5δ , nous pouvons considérer que \vec{B} et \vec{j} sont nuls. Cela signifie donc que \vec{B} et \vec{j} s'annulent quasiment tout de suite dans le volume du supraconducteur et n'existent qu'au voisinage de la surface.

Q21. On peut supposer une décroissance exponentielle avec une constante de longueur δ , de la forme :



V. La RMN pulsée

Q22. Tout d'abord, $\|\vec{B}_1\| = B_1 = \text{Cste}$. Ensuite, si on représente \vec{B}_1 à $t = 0$, puis à t_1 tel que $\omega t_1 = \pi/2$, nous obtenons :



Ainsi, l'extrémité de \vec{B}_1 décrit un cercle de rayon B_1 dans le sens horaire.

Q23. Négliger les phénomènes de relaxation revient à faire $T_1 \rightarrow +\infty$ et $T_2 \rightarrow +\infty$ dans les équations de Bloch. Le champ magnétique vu par le dipôle étant maintenant $\vec{B}_0 + \vec{B}_1$, il vient :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{M}$$

avec $\vec{\omega}_0 = -\gamma_p B_0 \vec{e}_z = -\omega_0 \vec{e}_z$ et $\vec{\omega}_1 = -\gamma_p \vec{B}_1 = -\omega_1 \vec{e}_1$.

Q24. Il s'agit d'une rotation de repère dans le sens horaire, ce qui donne :

$$\vec{\omega}(R_1/R_0) = -\omega \vec{e}_z$$

Q25. Utilisons la loi de dérivation vectorielle :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{M} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_1} - \omega \vec{e}_z \wedge \vec{M}$$

et, d'autre part :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_0} = -\omega_0 \vec{e}_z \wedge \vec{M} - \omega_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{M}$$

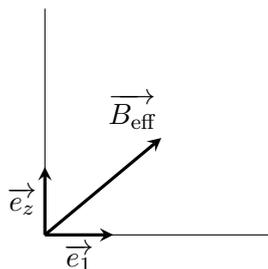
En regroupant les deux expressions, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_1} &= (\omega - \omega_0) \vec{e}_z \wedge \vec{M} - \omega_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{M} \\ &= \vec{M} \wedge [(\omega_0 - \omega) \vec{e}_z + \omega_1 \vec{e}_1] \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \frac{\omega_0 - \omega}{\gamma_p} \vec{e}_z + \frac{\omega_1}{\gamma_p} \vec{e}_1 = \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma_p}\right) \vec{e}_z + B_1 \vec{e}_1$$

qui est bien homogène à un champ magnétique. Ce champ "effectif" est représenté sur la figure ci-dessous, dans le cas où $\omega_0 > \omega$:



Q26. Dans le référentiel tournant, nous sommes ramenés à la situation des questions 9., 10. et 11. Le vecteur aimantation va avoir un mouvement de précession autour de l'axe défini par le champ magnétique effectif \vec{B}_{eff} .

Q27. Si on tient compte des temps de relaxation T_1 et T_2 , ce mouvement de précession va s'amortir. Le vecteur aimantation va venir s'aligner selon l'axe défini par le champ magnétique effectif \vec{B}_{eff} , avec une constante de temps T_1 , tandis que les composantes de \vec{M} orthogonales à cet axe vont tendre vers 0 avec une constante de temps T_2 .

Comme, selon le document 3, la norme de \vec{M} est conservée au cours de ce basculement, le vecteur \vec{M} va finir par s'aligner selon l'axe de \vec{B}_{eff} , avec une norme égale à M_0 .

Q28. Il faut faire varier la direction de l'axe de \vec{B}_{eff} en agissant sur la vitesse angulaire ω du champ tournant et en attendant un temps $T > \max(T_1, T_2)$ pour que \vec{M} ait le temps de s'aligner sur cet axe. Ainsi, pour faire basculer \vec{M} dans le plan Oxy , il est nécessaire que $\omega = \omega_0$.

A.N. : $\omega = \omega_0 = 2,67 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$ et donc $f = \omega/2\pi = 42,5 \text{ MHz}$, ce qui correspond à des ondes radiofréquence.

On appelle ce phénomène "résonance" parce que ce basculement se produit pour une fréquence caractéristique f_0 du système.

Q29. Il faut que $t_1 > \max(T_1, T_2)$ (déjà répondu à la question précédente). D'après le document 3, $T_1 > T_2$ pour les tissus étudiés et donc il faut que $t_1 > T_1$ qui varie de 0,2 s à 3 s et qui dépend de l'intensité de B_0 .