CCP Maths 2 MP 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Perrier (ENS Lyon) ; il a été relu par Yacine Dolivet (ENS Ulm) et Jean Starynkévitch (ENS Cachan).

Le sujet propose une étude des matrices compagnon.

On étudie dans la première partie la diagonalisabilité de ces matrices. Ensuite, on utilise celles-ci pour donner, dans la deuxième partie, une localisation des racines d'un polynôme, puis pour l'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre p (dans la troisième partie). La quatrième partie, plus difficile, propose une brève étude des couples (U,V) de matrices vérifiant $\text{rg}\,(\text{U} - \text{V}) = 1$.

Ce problème fait un large tour d'horizon des notions d'algèbre linéaire au programme et permet de revoir plusieurs raisonnements classiques dans ce domaine.

Indications

Partie I

1 Calculer $\det \mathrm{C_P}$.

2 Raisonner par récurrence sur la taille de la matrice compagnon, ou bien effectuer l'opération sur les lignes $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{X}\,\mathrm{L}_2 + \mathrm{X}^2\,\mathrm{L}_3 + \ldots + \mathrm{X}^{n-1}\,\mathrm{L}_n$.

4.d Utiliser la question 4.c pour montrer que la matrice est diagonalisable, puis utiliser la question 4.b.

5.a Utiliser la question 5.a et le théorème de Cayley-Hamilton.

5.b Choisir y tel que $f^{n-1}(y) \neq 0$ et montrer que $(y, f(y), \ldots, f^{n-1}(y))$ est une base.

Partie II

8 Utiliser la matrice compagnon associée à P.

9 Les cas $n > 2$ s'éliminent grâce à la question 8 et le cas $n = 2$ s'élimine à la main.

Partie III

12.b Utiliser φ^{-1}.

15.a Utiliser la question 10.

16 Remarquer que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)(\mathrm{X}-c)$.

Partie IV

18 Montrer que $\mathrm{C}_u - \mathrm{C}_v$ est de rang 1.

19 Comme le suggère la suite de l'énoncé, il faut choisir le contre-exemple de manière à ce que l'on ait $\mathrm{pgcd}\,(\chi_u, \chi_v) \neq 1$ et il est bien sûr préférable de choisir des matrices diagonales.

21.a Raisonner par l'absurde, en supposant que $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ et en montrant qu'on a alors $\chi_{u_{|\mathrm{F}}} | \chi_v$, donc un diviseur non trivial commun à χ_u et χ_v.

21.b À l'aide des matrices de u et de v dans une base B' suggérée par l'énoncé, construire un diviseur non trivial commun à χ_u et χ_v.

22.b Choisir φ_i telles que $\mathrm{G}_i = \mathrm{Ker}\ \varphi_i$ et appliquer le théorème du rang à
$$x \to (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-2}(x))$$

22.c Montrer que $\mathrm{Vect}\,(y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y))$ est stable par u et v.

23 Considérer l'ensemble E, à $2n$ éléments, constitué des vecteurs e_i de la base trouvée à la question précédente ainsi que des vecteurs $-e_i$. Faire alors agir le groupe engendré par u et v sur cet ensemble de la manière $g.e = g(e)$. Montrer que cette action est fidèle et en déduire que le groupe engendré par u et v s'injecte dans $\mathfrak{S}_{2n}$.

On peut également se passer d'action de groupe. Il suffit de remarquer que le groupe engendré par u et v est inclus dans le groupe
$$\mathrm{G} = \{\alpha \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \alpha(e_i) = e_{\sigma(i)}\ \textit{ou}\ -e_{\sigma(i)}\}$$
puis de calculer le cardinal de G.

I. Propriétés générales

1 En développant le déterminant de $\mathrm{C_P}$ par rapport à la première ligne, on voit que $\det \mathrm{C_P} = (-1)^{n+2}\, a_0$.

Une autre méthode consiste à regarder le rang de la matrice : si $\mathrm{C_P}$ est inversible, alors la première ligne est non nulle, donc $\mathrm{P}(0)$ est non nul. Réciproquement, si $\mathrm{P}(0)$ est non nul alors les $n-1$ premières colonnes de $\mathrm{C_P}$ sont libres, et la dernière colonne n'est pas combinaison linéaire des $n-1$ premières, puisque la première coordonnée de celles-ci est nulle et que la première coordonnée de la dernière colonne est non nulle. On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{C_P} \text{ est inversible si et seulement si } \mathrm{P}(0) \neq 0.}$$

2 En effectuant l'opération sur les lignes $\mathrm{L_1} \leftarrow \mathrm{L_1} + \mathrm{XL_2} + \ldots + \mathrm{X}^{n-1}\mathrm{L}_n$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\mathrm{P(X)} \\ 1 & -\mathrm{X} & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & -a_{n-1} - \mathrm{X} \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne, on en déduit

$$\boxed{\chi_{\mathrm{C_P}} = (-1)^n \mathrm{P}}$$

> On aurait pu également raisonner par récurrence, d'autant plus que le résultat était quasiment donné par l'énoncé. Cette méthode est bien sûre juste, mais elle est plus longue à rédiger, ce qui devient handicapant dans une épreuve en temps limité.

3 Condition nécessaire : si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors on sait que son polynôme caractéristique est de degré n et que son terme de plus haut degré est $(-1)^n$.

Réciproquement, supposons que P soit un polynôme de degré n, et que son terme de plus haut degré soit $(-1)^n$. Alors il s'agit du polynôme caractéristique de $\mathrm{C}_{(-1)^n\mathrm{P}}$.

4.a $\mathrm{C_P}$ et ${}^t\mathrm{C_P}$ ont même polynôme caractéristique, car

$$\det(\mathrm{C_P} - \lambda\,\mathrm{id}) = \det({}^t(\mathrm{C_P} - \lambda\,\mathrm{id})) = \det({}^t\mathrm{C_P} - \lambda\,\mathrm{id})$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{sp}(\mathrm{C_P}) &\iff \chi_{\mathrm{C_P}}(\lambda) = 0 \\ &\iff \chi_{{}^t\mathrm{C_P}}(\lambda) = 0 \\ \lambda \in \mathrm{sp}(\mathrm{C_P}) &\iff \lambda \in \mathrm{sp}({}^t\mathrm{C_P}) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{sp}(\mathrm{C_P}) = \mathrm{sp}({}^t\mathrm{C_P})}$$

4.b Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(\mathrm{C_P})$.

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{C_P} - \lambda\ \mathrm{id}\ ) \iff \begin{cases} \forall\, 2 \leqslant i \leqslant n \quad x_i = \lambda^{i-1}\, x_1 \\ \mathrm{P}(\lambda)\, x_1 = 0 \end{cases}$$

On en déduit $\boxed{\operatorname{Ker}(\mathrm{C_P} - \lambda\,\mathrm{id}) = \mathbb{K}\,(1,\ \lambda, \ldots,\ \lambda^{n-1})}$

4.c Supposons ${}^t\mathrm{C_P}$ diagonalisable. Alors $\chi_{\mathrm{C_P}}$ est scindé sur $\mathbb{K}$, et

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{sp}({}^t\mathrm{C_P})} \operatorname{Ker}({}^t\mathrm{C_P} - \lambda\,\mathrm{id})$$

donc
$$n = \dim(\mathrm{E}) = \sum_{\lambda\in\mathrm{sp}({}^t\mathrm{C_P})} \dim(\operatorname{Ker}({}^t\mathrm{C_P} - \lambda\,\mathrm{id}))$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\dim(\operatorname{Ker}({}^t\mathrm{C_P} - \lambda\,\mathrm{id})) \leqslant 1$. Nécessairement, ${}^t\mathrm{C_P}$ admet n valeurs propres distinctes ; P admet donc n racines distinctes, soit n racines simples.

Réciproquement, si P est scindé à racines simples, alors ${}^t\mathrm{C_P}$ admet n valeurs propres distinctes, donc ${}^t\mathrm{C_P}$ est diagonalisable. On en déduit bien que

$\boxed{{}^t\mathrm{C_P} \text{ est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.}}$

4.d Le déterminant de Vandermonde est le déterminant d'une base de vecteurs propres de ${}^t\mathrm{C_P}$ exprimée dans la base canonique, donc, d'après la question 4.b, il est non nul.

> Le déterminant de Vandermonde est un résultat classique, qu'il vaut mieux connaître. On a en fait :
> $$\operatorname{Vdm}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$
> Ceci peut se démontrer, par exemple, par récurrence sur p. On pose $a_n = \mathrm{X}$, et on remarque alors que le déterminant est un polynôme de degré n, dont les racines sont les a_i et dont le coefficient dominant s'obtient par l'hypothèse de récurrence, en développant par rapport à la dernière ligne.

5.a D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on choisit une matrice A telle que

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{2002} - \mathrm{X}^{2001} - \mathrm{X}^{2000} - 1999$$

D'après la question 3, cela est possible et la matrice suivante, de format 2002 convient :

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1999 \\
1 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$