Mode de convergence des suites de fonctions

Exercise 1 *Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto xe^{-nx^2}$. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.*

Exercise 2 *Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+n^2}$. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}$ puis la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.*

Exercise 3 *Soient $\alpha > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{(nx)^\alpha}{1+nx^2}$. Étudier la convergence simple, uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$, sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.*

Exercise 4 *Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto e^{-x}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis la convergence uniforme sur $[0,a]$ $(a>0)$ et enfin la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.*

Exercise 5 *Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0,a]$ $(0<a<1)$ puis sur $[b,+\infty[$ $(b>1)$ et enfin sur $\mathbb{R}_+$.*

Exercise 6 *Déterminer la convergence simple de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$. Sur quels types d'intervalles est-elle uniformément convergente ?*

Exercise 7 *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $f_n : x \mapsto n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ et $g_n : x \mapsto \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.*

1. *Expliciter les limites simples des suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ puis prouver que les suites $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $(g_n)_{n\geqslant 1}$ ne convergent pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment $[0,a]$ $(a>0)$*
3. *Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+, \quad |e^x - e^y| \leqslant e^{\max(x,y)}|x-y|$. En déduire que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment $[0,a]$ $(a>0)$.*

Régularité des limites de suites de fonctions

Exercise 8 *Pour tout entier n, on note $f_n : x \mapsto \cos(2\pi n! x)$. On suppose qu'il une fonction f telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur un segment $[a,b]$*

1. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ lorsque $x \in \mathbb{Q}$. En déduire que $f = 1$ sur $[a,b]$.*
2. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 f$. En déduire une contradiction. Conclusion ?*

Exercise 9 *On admet le résultat suivant :*

$$\forall (a_0,..,a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \exists (L_i)_{0\leqslant i\leqslant d} \in (\mathbb{R}_d[X])^{d+1}, \quad \forall P \in \mathbb{R}_d[X], \quad P(X) = \sum_{i=0}^{d} P(a_i)L_i(X).$$

Soit d un entier naturel, (f_n) une suite de fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré au plus d. On suppose que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}$. Montrer que la limite est polynômiale de degré au plus d, la convergence étant uniforme sur tout segment.

Exercise 10 *Soit $q \in]-1,1[$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-q^k x)$. Prouver que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge sur $[-0,1]$ vers une fonction continue. Est-ce encore le cas sur $\mathbb{R}$?*

Exercise 11 *Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{x+k}$. Prouver que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ vers une fonction f qui est 1-périodique. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.*

Convergence des séries de fonctions

Exercise 12 *Déterminer le domaine de convergence simple puis le domaine de convergence normale des séries* $\sum_{n\geqslant 0} xe^{-n^2x}$. *et* $\sum_{n\geqslant 0} ne^{-n^2x}$.

Exercise 13 *Soit* $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *on pose :* $f_0 = f$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad f_n(x) = \int\limits_0^x f_{n-1}(t)dt.$

1. *Soit* $a > 0$. *Prouver que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-a,a], \quad |f_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} \sup\limits_{[-a,a]} |f|$.
2. *Démontrer que la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge uniformément sur tout segment de* $\mathbb{R}$. *On note* S *sa somme.*
3. *Etablir que* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = f(x) + \int\limits_0^x S(t)\,dt$ *puis expliciter* S *lorsque* $f : x \mapsto e^x$.

Exercise 14 *Montrer que la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{x^2+n^2}$ *converge converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *et converge normalement sur tout segment de* $\mathbb{R}$.

Exercise 15 *Soit* f *une application réelle continue sur* $[0,1]$; *on étudie la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n t^n f(t)$.

1. *Éudier la convergence simple de cette série.*
2. *Montrer qu'elle converge uniformément sur* $[0,1]$ *si et seulement si* $f(1) = 0$.

Limites de somme de séries de fonctions

Exercise 16 *Soit* $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)\sqrt{x}}{1+n^2x}$. *Déterminer le domaine de définition de* f. *Calculer sa limite puis un équivalent quand* $x \to +\infty$.

Exercise 17 *On pose* $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x)^2}\right)$.

1. *Montrer que* f *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Prouver que* $\lim\limits_{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Exercise 18 *Soit* $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$.

1. *Étudier le domaine de définition de* S.
2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$ *et proposer un équivalent de* $S(x)$ *quand* $x \to +\infty$.
3. *En utilisant la comparaison série-intégrale, proposer un équivalent simple de* $S(x)$ *quand* $x \to 0^+$.

Exercise 19 *À l'aide de la comparaison série-intégrale, donner un encadrement de* $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.
En déduire la valeur de $\lim\limits_{+\infty} S$ *puis, sans calcul, justifier que la la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{x^2+n^2}$ *ne converge pas uniformément sur tout intervalle non borné de* $\mathbb{R}$.

Exercise 20 *On pose* $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ *et* $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* f *et préciser la valeur de* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. *À l'aide la comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de* f. *En déduire un équivalent simple de* $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* 0.

Exercise 21 *On pose* $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n\left(1+nx^2\right)}$. *Préciser le domaine de définition de* f *et calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

Continuité d'une somme de séries de fonctions

Exercise 22 *Prouver que* $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n\left(1+nx^2\right)}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercise 23 *Soit* $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\left(\operatorname{sh}\left(nx\right)\right)^2}$. *Expliciter son domaine de définition et étudier sa continuité.*

Exercise 24 *Donner le domaine de définition de* $g : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$ *et justifier sa continuité.*

Exercise 25 *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* $\varphi : [-a, a] \to \mathbb{R}$. *On définit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. *On suppose qu'il existe* $K \in \mathbb{R}_+$ *pour lequel* $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\varphi\left(x\right)\right| \leqslant K\left|x\right|$.

1. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge sur* $[-a, a]$ *et que sa somme est continue.*

2. *Montrer que* S *est la seule fonction continue* f *vérifiant l'équation* $f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \varphi(x)$ *avec la condition* $f(0) = 0$.

Exercise 26 *Soient* $\left(a_n\right)$ *une suite réelle de limite nulle,* $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *continue et croissante sur* $[0, 1]$.
Montrer que $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \left(G\left(x^k\right) - G\left(x^{k+1}\right)\right)$ *est définie et continue sur* $[0, 1]$.

Dérivabilité d'une somme de séries de fonctions

Exercise 27 *Montrer que* $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ *est de classe* C^∞ *sur* $[1, +\infty]$ *puis sur* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$.

Exercise 28 *Soit* $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. *Etablir que* f *est de classe* C^∞ *sur* $]0, +\infty[$.

Exercise 29 *Prouver que la fonction* $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{inx}}{n!}$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercise 30 *Effectuer la décomposition en éléments simples dans* $\mathbb{C}$ *de* $\dfrac{1}{n^2+x^2}$. *En déduire que* $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n}{n^2+x^2}$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

Étude de fonctions

Exercise 31 *On pose* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. *Montrer que* f *est définie et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Justifier que* $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) + f(x+1) = \ln(x+1) + f(1)$.
3. *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et proposer un équivalent simple de* $f(x)$ *quand* $x \to +\infty$.

Exercise 32 *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. *Etudier sa continuité et sa dérivabilité sur* $]0, +\infty[$.
2. *Préciser le signe de* f *ainsi que sa monotonie et l'allure du graphe de* f *sur* $]0, +\infty[$.
3. *Déterminer les limites* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

Exercise 33 *On considère* $f : x \mapsto \sum_{nn=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$. *Justifier que* f *est définie sur* $\mathbb{R}_+$, *qu'elle est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+$ *et qu'elle réalise une bijection de* $\mathbb{R}_+$ *sur* $\mathbb{R}_+$.