

Problème 1

Dans ce problème, on étudie l'intégrale de Wallis généralisée, définie par :

$$\forall x > -1, \quad W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t) dt.$$

1. a) Montrer que l'intégrale $W(x)$ est définie pour tout réel positif x .
 b) Préciser un équivalent simple de la fonction $t \rightarrow \sin^x(t)$ quand t tend vers 0 .
 En déduire pour quelles valeurs du réel x l'intégrale $W(x)$ est définie.
 c) Déterminer le sens de variation de la fonction W sur $] -1, +\infty[$.
d) Pour les 5/2 uniquement pour les 3/2 on admet le résultat.
 Etablir que la fonction W est continue sur $\mathbb{R}_+$ (on citera précisément le théorème utilisé).
2. Première équation fonctionnelle de la fonction W et applications
 a) En écrivant $\sin^{x+2}(t) = \sin(t) \sin^{x+1}(t)$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall x > -1, \quad (x+2)W(x+2) = (x+1)W(x).$$

- b) En déduire que la fonction W est également continue sur $] -1, +\infty[$.
 c) En déduire un équivalent de $W(x)$ quand x tend vers -1 .
3. Deuxième équation fonctionnelle de la fonction W et applications
 a) Etablir que la fonction φ définie sur $] -1, +\infty[$ par $\varphi(x) = (x+1)W(x+1)W(x)$ vérifie :

$$\forall x > -1, \quad \varphi(x+1) = \varphi(x).$$

En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- b) Etablir l'encadrement suivant pour tout réel $x \in]0, 1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\varphi(n+1)}{n+2} \leq \frac{\varphi(n+x)}{n+1+x} \leq \frac{\varphi(n)}{n+1}.$$

En déduire un encadrement de $\varphi(x)$ pour tout réel $x \in]0, 1]$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, en déduire que la fonction φ est constante, et préciser φ .

- c) En déduire l'encadrement suivant pour $x > 0$:

$$\frac{\pi}{2(x+1)} \leq W^2(x) \leq \frac{\pi}{2x}.$$

En déduire un équivalent de $W(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Application au calcul de l'intégrale de Gauss

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1 et on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \quad \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{n}, \quad f_n(x) = 0 \quad \text{si } x \geq \sqrt{n}.$$

- a) En exploitant la concavité de la fonction $\ln$ (ou une autre méthode), montrer qu'on a $f_n(x) \leq e^{-x^2}$ pour $x \geq 0$.
 b) Etudier la convergence simple de la suite (f_n) .
 c) Justifier l'égalité suivante (on citera précisément le théorème utilisé) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

- d) Exprimer l'intégrale de f_n sur $[0, +\infty[$ en fonction de n et de $W(2n+1)$.

Déduire de ces résultats la valeur de l'intégrale de la fonction $x \rightarrow e^{-x^2}$ sur $[0, +\infty[$.

Problème II Dans ce problème, on désigne par n un entier supérieur ou égal à 1, et on considère, sous réserve d'existence, la suite des intégrales I_n définies par :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt.$$

A cet effet, on calcule dans la partie I une intégrale auxiliaire, ce qui permet d'obtenir dans la partie II un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE I : Etude d'une intégrale auxiliaire

On considère dans cette partie la fonction définie pour tout réel $x \geq 0$ par :

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-xu} du.$$

1°) Etude d'une fonction auxiliaire f

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(u) = \frac{1 - \cos(u)}{u^2}.$$

a) Etablir que f est une fonction continue, et vérifier que $0 \leq f(u) \leq 2/u^2$ pour $u > 0$.

b) Etablir que f admet une limite l (dont on précisera la valeur) lorsque u tend vers 0. On posera $f(0) = l$, et on notera encore f ce prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}_+$.

c) En déduire que l'intégrale $L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$ est convergente.

d) En déduire que l'intégrale $L(x)$ est convergente pour tout réel positif x . **Dans toute la suite on admet que $L(0) = \frac{\pi}{2}$.**

PARTIE II : Etude asymptotique de la suite (I_n)

4°) Etude de l'intégrale I_1

a) Calculer, pour tout réel positif x , l'intégrale suivante $\int_0^x \sin(t) dt$.

b) Qu'en déduit-on pour l'intégrale I_1 ?

5°) Etude d'une fonction auxiliaire f_n

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \frac{1 - \cos(t^n)}{t^n}.$$

a) Etablir que f_n est une fonction continue, et vérifier que $0 \leq f_n(t) \leq 2/t^n$ pour $t > 0$.

b) Déterminer la limite l_n de $f_n(t)$ lorsque t tend vers 0.

On posera $f_n(0) = l_n$, et on notera encore f_n ce prolongement par continuité de f_n à $\mathbb{R}_+$.

c) Etablir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.

6°) Etude de l'intégrale I_n pour $n \geq 2$

a) A l'aide d'une intégration par parties, établir l'égalité suivante pour $x > \varepsilon > 0$:

$$\int_\varepsilon^x \sin(t^n) dt = \frac{x f_n(x)}{n} - \frac{\varepsilon f_n(\varepsilon)}{n} + \frac{n-1}{n} \int_\varepsilon^x f_n(t) dt.$$

b) En déduire la convergence de l'intégrale I_n pour $n \geq 2$.

Exprimer celle-ci en fonction de $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

c) A l'aide du changement de variable $u = t^n$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$, établir que :

$$I_n = \frac{n-1}{n^2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^{2-1/n}} du.$$

7°) Equivalent de l'intégrale I_n

a) Rappeler l'énoncé du théorème de convergence dominée.

b) A l'aide de ce théorème et du résultat de la partie I, vérifier l'égalité suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^{2-1/n}} du = \frac{\pi}{2}.$$

c) En déduire que $I_n \sim \frac{\pi}{2n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.