

Exercice 1 Soient E un espace muni d'un produit scalaire, (e_1, e_2, \dots, e_n) une famille de vecteurs de E tel que :

$$\left\{ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \|e_i\| = 1 \quad \forall x \in E, \sum_{i=1}^n (x | e_i)^2 = \|x\|^2 \right.$$

Démontrer que (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .

(attention E n'est pas supposé de dimension n ni même de dimension finie : on démontrera que la famille est orthonormale puis on projettera un vecteur de E sur le sous espace vectoriel $F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) + \text{théorème de Py...}$

Exercice 2 Dans \mathbf{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique, on considère :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \right\}$$

Donner une base de F et une base de F^\perp .

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel muni de $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée, $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 \leq n \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

Exercice 4 déjà donné dans une autre feuilles mais super standard

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on considère le produit scalaire $\phi : (A | B) \rightarrow \text{tr}(A^t B)$. On note N la norme euclidienne associée.

a) Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2, N(AB) \leq N(A)N(B)$.

b) Montrer que $\forall (A) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n}N(A)$. Etudier le cas d'égalité.

Exercice 5 Soit E un espace euclidien de dimension n , et soit u_0, u_1, \dots, u_n une famille de vecteurs vérifiant :

$$i \neq j \Rightarrow (u_i | u_j) < 0.$$

Si $\sum_{i=0}^n \lambda_i u_i = 0$ avec $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, montrer que les λ_i sont tous non nuls et de même signe. En déduire que (u_1, u_2, \dots, u_n) est une base de E .

Plus difficile : on fera des paquets d'indices tels que $\lambda_i > 0$, $\lambda_i < 0$, et $\lambda_i = 0$ et des produits scalaires judicieux. remarquer qu'il y a un vecteur de plus que la dimension.

Exercice 6 Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à termes réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

Pour $u, v \in E$, on pose : $(u | v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $(u | v)$ existe.
3. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Exercice 7 Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi(f, g) = \int_{[0,1]} fg + f'g'$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W .

(pensez à une intégration par parties pour \perp et exhibez une décomposition pour \oplus . (on trouve) $\pi(f)(t) = f(0) \frac{\text{sh}(1-t)}{\text{sh}(1)} + f(1) \frac{\text{sh}(t)}{\text{sh}(1)}$.

3. Soit $E_{\alpha\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer $\inf_{f \in E_{\alpha\beta}} \int_{[0,1]} f^2 + f'^2$.

Exercice 8 () Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour P et Q polynômes donnés, on pose $\Phi(P, Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t) dt$.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour Φ telle que, pour tout entier naturel n , $\deg(P_n) = n$.
- Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme P_n , $n \in \mathbb{N}^*$, a n racines réelles simples.

Exercice 9 (Polynômes de Legendre) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $P|Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.
 - Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, |)$.
 - Déterminer $\|L_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Déterminer l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E .

Exercice 10 (Polynômes de Tchebychev) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n -ième polynôme de TCHEBYCHEV de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

- Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
- Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ) .
 - Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Exercice 11 (Polynômes d'interpolation de Lagrange) Soient a_0, \dots, a_n $n + 1$ nombres complexes deux à deux distincts et b_0, \dots, b_n $n + 1$ nombres complexes.

Montrer qu'il existe une unique famille de $n + 1$ polynômes à coefficients complexes de degré n exactement vérifiant $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i(a_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Montrer que la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_i) = b_i$. Expliciter P puis déterminer tous les polynômes vérifiant les égalités précédentes.

Exercice 12 () Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = (X^n e^{-X})^{(n)} e^X$.

- Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
- Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de h_n . Montrer que la famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de E .
 - Montrer que la famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ) .
 - Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien (E, φ) .

Exercice 13 () Soient E un espace euclidien, p, q deux projecteurs orthogonaux de E .

- Rappeler la définition des projecteurs orthogonaux, ainsi que l'inégalité de Bessel.
- Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que les valeurs propres de u appartiennent à $[0, 2]$.
- Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u - 2\text{Id})$.

Exercice 14 () Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit $(\cdot | \cdot)$ sur E par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, (P|Q) = \int_0^1 t^2 P(t)Q(t) dt.$$

On définit aussi l'application u par :

$$\forall P \in E, u(P) = X(1 - X)P'' + (3 - 4X)P'.$$

- Justifier que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E et que u est un endomorphisme de E .
- Montrer que u est endomorphisme symétrique dans l'espace euclidien $(E, (\cdot | \cdot))$.
- Déterminer les valeurs propres de u .

4. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons $Q_k = X^{k+2}(1-X)^k$, montrer qu'il existe $P_k \in E$ tel que $Q_k^{(k)} = X^2 P_k$.
En justifiant d'abord que $X(1-X)Q_k' = (k+2-2(k+1)X)Q_k$, établir que P_k est un vecteur propre de u . Que peut-on dire de la famille (P_0, \dots, P_n) ?

Exercice 15 Prouver que $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(x) dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P^{(n)}(a_n) Q^{(n)}(a_n)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 17 On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (1-X^2)^n, L_n = U_n^{(n)}$.

1. A l'aide d'intégration par parties, montrer que $\langle L_n, L_m \rangle = (-1)^m \langle U_n^{(n+m)}, U_m \rangle$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.
2. Prouver que la famille $(L_n)_{n \geq 0}$ est orthogonale et calculer $\|L_n\|^2$.

Exercice 18 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que : a) $\ker({}^t A) = (\text{Im}(A))^\perp$, b) $\text{Im}({}^t A) = (\ker(A))^\perp$.

Exercice 19 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Justifier que $\|AX\|^2 = \langle {}^t A A X, X \rangle$.
2. Prouver que $\ker({}^t A A) = \ker(A)$. En déduire que $\text{Im}({}^t A A) = \text{Im}({}^t A)$.

Exercice 20 Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle + \langle x, u(y) \rangle = 0$ puis que $\text{Im}(u) = (\ker(u))^\perp$.
2. Soit $v = u|_{\text{Im}(u)}$. Démontrer que v est un automorphisme de $\text{Im}(u)$. Justifier que sa matrice A dans n'importe quelle base orthonormée est antisymétrique. En considérant $\det(A)$, prouver que $\text{rg}(u)$ est pair.

Exercice 21 On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t A B)$. On pose $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = -M\}$.

1. Que vaut $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$? $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$? Prouver que $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En déduire la distance de M à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 22 Soit $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$. On pose $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
2. Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, \mid f'' = f\}$.

Justifier que $W^\perp = V$ puis, pour $f \in E$, donner l'expression du projeté orthogonal de f sur W (resp. sur V).

Exercice 23 Ecrire la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 du projecteur orthogonal sur le plan d'équation $x + y + z = 0$. Expliciter une base orthogonale de ce plan.

Exercice 24 Soit $W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ et $H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^n w_k x_k = 0 \right\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Expliciter le projeté orthogonal de x sur H^\perp et le projeté orthogonal de x sur H .
2. En passant au matrice la relation de la question 1, montrer que la matrice de la projection orthogonale sur H^\perp (resp. H) est $\frac{{}^t W W}{W {}^t W}$ (resp. $I_n - \frac{{}^t W W}{W {}^t W}$).

Exercice 25 On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n q_n$ où $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$, $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n X^n$. On pose $H = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 1\}$. Déterminer H^\perp . A-t-on $H \oplus H^\perp = \mathbb{R}[X]$? $H = (H^\perp)^\perp$?

Exercice 26 On munit $\mathbb{R}_4[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$.

1. Donner une base orthogonale de $(\mathbb{R}_3[X])^\perp$ puis une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Expliciter le projeté orthogonal de X^4 sur $(\mathbb{R}_3[X])^\perp$ (resp. $\mathbb{R}_3[X]$).
3. Déterminer les $P \in \mathbb{R}_4[X]$, unitaires, tels que $\int_{-1}^1 (P(t))^2 dt$ soit minimale.

Exercice 27 Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t \ln(t) - at^2 - bt)^2 dt$.

Exercice 28 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, fixé, on pose $\Delta_n = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^1 (1 - x_1 t - \dots - x_n t^n)^2 dt$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$.

1. Justifier l'existence de $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\frac{(X-1) \cdots (X-n)}{(X+1) \cdots (X+n+1)} = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{X+k+1}$ et expliciter b_0 .
2. On pose $S = \sum_{k=0}^n b_k X^k$. Vérifier que $S \in (\text{Vect}(X, \dots, X^n))^\perp$ et que $\|S\|^2 = b_0 \langle S, 1 \rangle$.
3. Démontrer que $\frac{1}{b_0} S$ est le projeté orthogonal de 1 sur $(\text{Vect}(X, \dots, X^n))^\perp$. En déduire que $\Delta_n = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Exercice 29 Soit E un espace euclidien de dimension n et p un projecteur non nul de E .

1. On suppose p est un projecteur orthogonal. Prouver que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. On suppose que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$. Soient $y \in \ker(p)$ et $z \in \text{Im}(p)$. En considérant $x = z + ty$, montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, 2t \langle y, z \rangle \geq 0$. En déduire que $\ker(p) = (\text{Im}(p))^\perp$. Conclusion ?

Exercice 30 On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$ et on note $u : P \mapsto ((1-X^2)P)'$. Etablir que u est un endomorphisme symétrique de $(\mathbb{R}_n[X], \langle, \rangle)$, donner ses valeurs propres ainsi que la dimension de chaque espace propre et le degré de chaque vecteur propre.

Exercice 31 Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, $D : P \mapsto P'' - 2XP'$ et $\forall (P, Q) \in E^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$. Prouver que \langle, \rangle est un produit scalaire sur E . Montrer que D est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner ses valeurs propres.

Exercice 32 On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \text{Tr}({}^t X Y)$. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $u : M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM + MA$. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 33 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note $f : M \mapsto AMA^T + A^T MA$. Justifier que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$. Prouver que f est diagonalisable. **Indication** : Montrer que f est symétrique pour un produit scalaire convenable.

Exercice 34 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sans aucun calcul, montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in (\mathfrak{M}_4(\mathbb{R}))^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \alpha^n M + \beta^n N$. Justifier que M et N sont des projecteurs.

Exercice 35 Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe $P, Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que tPAP et tQBQ soient diagonales.
2. Expliciter une telle matrice P et une telle matrice Q . Peut-on choisir $P = Q$?

Exercice 36 Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $X_0 = {}^t(-1, 0, 1)$. On pose $X_k = \frac{A^k X_0}{\|A^k X_0\|}$.

1. Expliciter une matrice orthogonale P telle que tPAP soit diagonale. On note $D = {}^tPAP$.
2. On pose $\forall k \in \mathbb{N}, Y_k = {}^tP X_k$. Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}, \|A^k X_0\| = \|Y_k\|$ puis exprimer Y_k en fonction de D, k et Y_0 .
3. Montrer que la suite $(X_k)_k$ converge vers un vecteur propre de A et préciser la valeur propre correspondante.

Exercice 37 Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien, $(a, b) \in E^2$ une famille libre et $f : x \in E \mapsto \langle x, b \rangle a + \langle x, a \rangle b$.

1. Montrer que f est symétrique et expliciter $\ker(f)$. Quelle valeur propre de f en déduit-on ?
2. Justifier que $g = f|_{\text{Vect}(a,b)}$ est un endomorphisme et déterminer ses valeurs propres.
3. Donner les valeurs propres de f ainsi que la dimension de chaque espace propre.

Exercice 38 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Montrer que $\text{Tr}(A^2) \neq 0$ et que $(\text{Tr}(A))^2 \leq \text{rg}(A) \text{Tr}(A^2)$.

Exercice 39 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $(\det(A))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(A)$.

Exercice 40 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que ${}^tAA = A^tA$ et A est nilpotente. Montrer que tAA est une matrice diagonalisable et nilpotente. En déduire que ${}^tAA = 0_n$ puis que $A = 0_n$.

Exercice 41 Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et $f \in \mathcal{S}(E)$. Prouver que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 42 Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et $(f, g) \in (\mathcal{S}(E))^2$ tels que $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$ et $\text{Sp}(g) \subset \mathbb{R}_+$.

1. Prouver que $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle \geq 0$ et que $x \in \ker(f) \Leftrightarrow \langle f(x), x \rangle = 0$.
2. Démontrer que $\ker(f + g) = \ker(f) \cap \ker(g)$.

Exercice 43 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positives et $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$.

1. Justifier que $\det(A) \geq 0$ et que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} \geq 0$.
2. Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Expliciter $a_{i,j}$ en fonction des $(\lambda_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq n}$ et des $(p_{\alpha,\beta})_{1 \leq \alpha,\beta \leq n}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Prouver que $\sum_{i=1}^n f(a_{i,i}) \leq \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)$. En déduire que $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

Exercice 44 Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^t M M = I_n$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ puis déterminer M .

Exercice 45 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'équation $X^3 + X = A$ admet une solution dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'équation $X^2 = A$ admet des solutions dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'équation $e^X = A$ admet des solutions dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 46 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = \min(\text{Sp}(A))$ et $\beta = \max(\text{Sp}(A))$.

1. Montrer que $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \alpha {}^t X X \leqslant {}^t X A X \leqslant \beta {}^t X X$.
2. Prouver que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t X A X \geqslant 0$ et $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^t X A X > 0$.
3. Démontrer que $(X, Y) \mapsto {}^t X A Y$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 47 1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^t M M$.

2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^t M M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\text{Sp}({}^t M M) \subset \mathbb{R}_+$.

Exercice 48 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice anti-symétrique.

1. Montrer que A^2 est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\text{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_-$.
2. On suppose que A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = 0_n$.
3. Prouver que $\ker(A^2) = \ker(A)$ et démontrer que A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 49 Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. On pose $M = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On fixe une base orthonormale \mathcal{B} de E et on note $P = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

1. Etablir que $M = {}^t P P$. En déduire que $\det(M) \geqslant 0$ et que $M \in GL_n(\mathbb{R})$ ssi (u_1, \dots, u_n) est une famille libre.
2. Prouver que $\text{rg}(M) = \text{rg}(u_1, \dots, u_n)$.

Exercice 50 Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telle que $A = P^t P$ et $B = P D {}^t P$.

Exercice 51 Déterminer toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont à la fois orthogonales et anti-symétriques.

Exercice 52 Déterminer les matrices $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t A + A = 2I_n$.

Exercice 53 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = {}^t A$.

1. On suppose que $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Déterminer A .
2. On suppose que $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Calculer A^4 . Montrer que $A^3 = I_n$ puis que $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
3. On revient au cas général. Prouver que $\text{Im}(A) = (\ker(A))^\perp$. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $r \in \{0, \dots, n\}$ tels que ${}^t P A P = \text{diag}(B, 0_{n-r})$ avec $B \in GL_r(\mathbb{R})$ et $B^2 = {}^t B$. Déterminer A .

Exercice 54 Soient $(A, B) \in (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^2$ avec $\frac{A + 2B}{3} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $\forall (X, Y) \in (\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad {}^t X ({}^t A B - I_n) Y = 0_n$. Qu'en déduit-on sur A et B ?

Exercice 55 Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Phi_A : M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto A M {}^t A$. On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M N)$.

1. Prouver que $\Phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ et que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose que $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que Φ_A est une isométrie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $|\det(\Phi_A)| = |\det(A)|^{n+1}$.
3. Vérifier que $\forall (A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$. En déduire que $|\det(\Phi_A)| = |\det(A)|^{n+1}$ si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 56 Reconnaitre la transformation géométrique de \mathbb{R}^3 orienté dont la matrice dans la base canonique est a)

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ b) } \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \text{ c) } \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ -3 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Exercice 57 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $B = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$. Soit $X \in \ker(I_n - A)$. Montrer que ${}^t X X = 0$. En déduire que $I - A \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 58 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left| \sum_{i,j} a_{i,j} \right| \leq n^{3/2}$. **Indication** : On pourra utiliser Cauchy-Schwarz.

Exercice 59 Soit E un espace euclidien, $a, b \in E \setminus \{0\}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(x) = x - \langle a, x \rangle b$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que u soit une isométrie.