DS3

PARTIE I - Exemple 1

Dans cette partie f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = Arctan(t)$ (où $Arctan$ désigne la fonction Arctangente).

1. On sait que la fonction Arctangente est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $Arctan(0) = 0$ donc $f \in E_0$. De plus $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t} = f'(0) = 1$ d'où la fonction $g : t \mapsto \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2$ est prolongeable par continuité en 0 et $0 \leqslant g(t) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi^2}{4t^2}$, donc la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $f \in E_1$.
2. Pour tout $x > 0$, la fonction $H_x : t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$ avec $H_x(t) \leqslant \dfrac{1}{x^2(1+t^2)}$, cette dernière fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout $x > 0$ donc pour tout $x > 0$, H_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}^+, (f'(t))^2 = H_1(t)$, donc $f \in E_2$.
3. Calcul de $N_2(f)$.
   Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} H_x(t)dt$.
   (a) Pour tout $x > 0$, H_x est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto H_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $a > 0$ et tout $x \in [a, +\infty[$,
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leqslant H_x(t) \leqslant H_a(t) \qquad \text{(hypothèse de domination)}$$
   la fonction H_a étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on sait par théorème de continuité que la fonction φ est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, par décomposition en éléments simples (deux pôles simples :$-1, -x^2$)
   $$\frac{1}{(T+1)(T+x^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+x^2}\right)$$
   (c) D'après la décomposition en éléments simples précédente, pour $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, on a :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+, H_x(t) = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+x^2}\right)$$
   On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, on a :
   $$\varphi(x) = \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+x^2}\right)dt = \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x}\frac{1/x}{1+(t/x)^2}\right)dt$$
   $$\varphi(x) = \frac{1}{x^2-1}\lim_{b\to+\infty}\left[Arctan(t) - \frac{1}{x}Arctan(\frac{t}{x})\right]_0^b = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right) = \frac{\pi}{2x(1+x)}$$
   (d) Par définition de $N_2(f)$ avec $(f'(t))^2 = H_1(t)$ on a : $N_2(f) = \sqrt{\varphi(1)}$ et par continuité de φ en 1 on aura : $N_2(f) = \sqrt{\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. La fonction $p : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto u - Arctan(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall u \in \mathbb{R}_+, p'(u) = \dfrac{u^2}{1+u^2}$, la fonction p est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$, or $p(0) = 0$ donc
$$\forall u \in \mathbb{R}_+, u - Arctan(u) \geqslant 0$$
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \dfrac{Arctan(xt)}{t(t^2+1)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $G_x(t) \sim_0 \dfrac{x}{1+t^2}$ et $G_x(t) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{2t^3}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, G_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Calcul de $N_1(f)$.
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $\theta(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} G_x(t)dt$ et $G : (x,t) \in \mathbb{R}^+ \text{x} \mathbb{R}_+^* \mapsto G_x(t)$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction G_x est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto G_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. On a vu que $\forall u \in \mathbb{R}^+, Arctan(u) \leqslant u$ et donc pour tout $a > 0$ et tout $x \in [0,a]$:
   $0 \leqslant G_x(t) \leqslant \dfrac{xt}{t(1+t^2)} \leqslant \dfrac{a}{1+t^2}$ (hypothèse de domination avec $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$)
   On en déduit par application du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre que la fonction θ est continue sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a > 0$ et donc θ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) On sait déjà que la fonction θ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de plus la fonction G est dérivable par rapport à sa première variable x pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$. On aura donc pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est continue, positive sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $0 \leqslant \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$, on en déduit que $t \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et par domination, la fonction θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec la formule de Leibniz : $\theta'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)dt$.
   (c) D'après ce qui précède, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \theta'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}dt$. Pour $x > 0$, on aura donc $\theta'(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} H_{\frac{1}{x}}(t)dt = \dfrac{1}{x^2}\varphi(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2(x+1)}$ d'après le résultat de la question 3b et par continuité en 0 de θ', la formule est encore vraie pour $x = 0$.
   (d) On déduit du résultat précédent que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\theta(x) - \theta(0) = \dfrac{\pi}{2}ln(1+x) = \theta(x)$.
   (e) $N_1^2(f) = \displaystyle\lim_{a \to 0}\lim_{b \to +\infty} \int_a^b \dfrac{f^2(t)}{t^2}dt$. Par intégration par parties avec $f(t) = Arctan(t)$, on aura :
   $$\int_a^b \frac{f^2(t)}{t^2}dt = \left[-\frac{f^2(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{2f'(t)f(t)}{t}dt$$
   or $\displaystyle\lim_{a \to 0^+} \dfrac{f^2(t)}{t} = \lim_{a \to 0^+} Arctan(t)\dfrac{Arctan(t)}{t} = 0$ et $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \dfrac{Arctan^2(t)}{t} = 0$, on en déduit que :
   $$N_1^2(f) = \int_0^{+\infty} \frac{2Arctan(t)}{t(1+t^2)}dt = 2\theta(1) = \pi ln(2)$$
   On en déduit que $N_1(f) = \sqrt{\pi ln(2)}$ et donc $\dfrac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{ln(2)}$.