un exemple pour répondre aux questions

1. On pose $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f n'est pas continue en 0 bien que la restriction de f à toute droite passant par $(0, 0)$ soit continue en $(0, 0)$.

Calcul de différentielle

Méthode : on écrit $f(a+u)$ et on cherche à retrouver $f(a)$ + quelque chose de linéaire "en u " (mais qui dépend de a) + quelque chose de négligeable devant u , à vous de choisir la norme.

2. Justifier que la fonction $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1/z$ est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Montrer que l'application

$$P \mapsto \int_0^1 P(t)^2 dt$$

définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$X \mapsto {}^t X X$$

- a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle en tout point de X_0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Pour $X_0 \in GL_n(\mathbb{R})$, quel est le rang de $d_{X_0} f$?

Calcul de dérivées partielles de fonctions prolongées par continuité :

On s'attachera à écrire les fonctions D UNE VARIABLE $\phi(t)$ attachée à l'étude des dérivées partielles.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(x, y) = (x^2 + xy) \sin \frac{1}{y}$ si x est non nul et 0 sinon.

- a) Montrer que f est continue.
b) Montrer que f admet des dérivées partielles suivant x et y en $(0, 0)$. Les déterminer.
c) Soit $y_0 \neq 0$. La fonction admet-elle une dérivée partielle suivant x en $(0, y_0)$?

équations aux dérivées partielles un exercice où l'on a un difféomorphisme un peu original :

6. On note $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ Trouver toutes les applications $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $(\mathcal{C}^1)$ telles que :

$$\forall (x, y) \in U, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - y^2.$$

On utilisera le changement de variables $u = x + y$, $v = xy$ qui est un difféomorphisme de U dans un ouvert à déterminer.

(on pourra d'abord faire la partie calcul sans étudier la bijection)

7. Montrer que les fonctions suivantes vérifient les équations aux dérivées partielles indiquées :

(a) $f(x, y) = xy \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ pour $(x, y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ et $\frac{y}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vérifie :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x, y).$$

(b) $g(x, y) = \ln[(x-a)^2 + (y-b)^2]$ pour $(x, y) \neq (a, b)$ vérifie

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

(c) $h(x, y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ pour $(x, y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ où ϕ est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, vérifie :

$$x \frac{\partial h}{\partial x} + y \frac{\partial h}{\partial y} = 0.$$

8. On définit t sur $\Omega =]0, +\infty[\times \mathbf{R}$ par $t = \arctan \frac{y}{x}$. Montrer que t admet des dérivées partielles en tout point de Ω et que t est solution de :

$$x \frac{\partial t}{\partial x} + y \frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

On complète la définition de t sur le plan privé de la demi-droite $] -\infty, 0] \times \{0\}$, en posant $t = 2 \arctan \frac{y}{x+r}$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, le couple (r, t) est un système de coordonnées polaires du point X . Calculer $\frac{\partial t}{\partial x}$ et $\frac{\partial t}{\partial y}$ à partir de cette nouvelle expression.

9. Trouver toutes les applications $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$\forall (x, y) \in U, 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

On utilisera le changement de variables $u = x + y, v = x + 2y$

Puis trois très classiques

10. En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

11. En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

12. En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Recherche d'extremums

13. Extrema locaux et globaux de

$$f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$$

14. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{si } y \leq x \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue.

b) On note $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.

c) Montrer que f n'admet de dérivées partielles en un point (a, a) de Δ .

d) montrer que f admet un maximum et un minimum sur $[0, 1] \times [0, 1]$. Les déterminer.

15. Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$$

16. Soit $f : (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$ définie sur

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

a) Justifier que f est continue et présente un maximum à l'intérieur de T .

b) Déterminer sa valeur.

17. Soit S le sommet de coordonnées $(a, 0)$ de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Déterminer deux points M, N de l'ellipse tels que l'aire du triangle (SMN) soit maximale.