

Pour Mardi

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes, et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall P \in E, f(P)(X) = \frac{P(-X) - P(X)}{2}.$$

1. Montrer que $f \in L(E)$
2. Montrer que $E = \text{Im} f \bigoplus \text{Ker}(f)$ et $f^2 = -f$.
3. Soit g un endomorphisme qui vérifie $g^2 + g = 0$, montrer que $E = \text{Ker}(g + \text{Id}_E) \bigoplus \text{Ker}(g)$

Pour Mercredi

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Pour tout endomorphisme de E , on note $\text{Ker}(u)$ le noyau de u et $\text{Im}(u)$ l'image de u .

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel V de E est stable par u si et seulement si $u(V) \subset V$

1. Soient u, v des endomorphismes de E qui commutent $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .
Dans la suite u désigne un endomorphisme qui vérifie $u^2 = 0$.
2. Démontrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$
3. En déduire une inégalité sur le rang.
4. On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{R}^2$. On suppose aussi que u est non nul.
 - (a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u) = D$.
 - (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
 - i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
 - ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.
 - (c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0, w^2 = 0, u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$. Démontrer que $v \circ w = 0$
5. On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2 . Soient $u_1, \dots, u_m$ des endomorphismes de E tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\}^2, u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

On pose $F_1 = \text{Im}(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m , $F_i = \text{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.

- (a) Démontrer que, pour tout entier i compris entre 1 et $m-1$, F_i est un sous espace vectoriel stable par u_{i+1} .
- (b) En déduire que, pour tout entier i compris entre 1 et m , F_i est de dimension au plus $\frac{n}{2^i}$.
- (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_m = 0$.

1 Pour Jeudi

1. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant : $\text{Ker} f = \text{Im} f$.
 - (a) Montrer que nécessairement n est un entier pair et déterminer le rang de f en fonction de n .

- (b) Montrer que, $f \circ f = 0$
2. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0$ et $\dim E = 2 \operatorname{rg}(f)$.
- (a) Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker} f$.
- (b) En déduire que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
3. On suppose $n \geq 1$. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$, $p = \operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Ker} f)$ et $q = n - p$.
Soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E et soit $(e_1, e_2, \dots, e_q)$ une base de F .
- (a) Montrer que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_q))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
- (b) Posons, pour tout entier i compris entre 1 et q , $e_{q+i} = f(e_i)$; calculer $f(e_{q+i})$.
- (c) Montrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_q, e_{q+1}, \dots, e_{2q})$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
4. **Application :** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$ et sans aucun calcul déterminer A^2 .
- (b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.
- (c) Déterminer les vecteurs d'une telle base $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de la base de $\mathcal{B}$

2 Pour vendredi

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u^3 + u = 0$$

- a) Montrer que l'espace $\operatorname{Im} u$ est stable par u .
- b) Pour $x \in \operatorname{Im} u$, calculer $u^2(x)$
- c) Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$.
Montrer que v est un isomorphisme.
- d) En déduire que le rang de l'endomorphisme u est un entier pair.