Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels.

On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = (X^2-1)P" + XP'.$$

On admet que Φ est linéaire.

Partie 1

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, déterminer $\Phi(X^k)$.
3. En déduire $\ker(\Phi)$.
4. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Calculer la trace de Φ.

On cherche à montrer qu'il existe une base B' de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que la matrice de Φ dans B' soit diagonale. On suppose tout d'abord que cette base existe, notée $B' = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. On a alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

6. Que doit valoir $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i$?

7. Expliquer pourquoi pour tout $i \in \{0, 2, \dots, n\}$, l'application $\Phi - \lambda_i \mathrm{Id}_n$ n'est pas injective. À quel noyau ε_i doit-il appartenir ? Donner la valeur de $\det(\Phi - \lambda_i \mathrm{Id}_n)$.

Revenons à l'étude de Φ.

8. Écrire la matrice dans la base canonique de $\Phi - \lambda_i \mathrm{Id}_n$ puis calculer $\det(\Phi - \lambda_i \mathrm{Id}_n)$. En déduire les valeurs possibles des λ_i.

On note dans toute la suite $F_i = \ker(\Phi - \lambda_i \mathrm{Id}_n)$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$. On souhaite montrer que

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n = E.$$

9. Que sait-on de la dimension de chaque F_i ?
10. Que faut-il vérifier pour démontrer la somme directe ?
11. En utilisant l'endomorphisme $u = (\Phi - \lambda_1 \mathrm{Id}_n) \circ (\Phi - \lambda_3 \mathrm{Id}_n) \circ \cdots \circ (\Phi - \lambda_n \mathrm{Id}_n)$, simplifier l'expression de la question précédente. Conclure en expliquant avec vos mots comment faire.
12. En déduire que $F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$ et donner la valeur de chaque $\dim(F_i)$. Expliquer alors comment choisir une base B' qui convient. Donner par exemple un vecteur $\varepsilon \in \ker(\Phi - 4\mathrm{Id}_n)$.

Partie 2

Soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$\begin{cases} T_0(X) = 1, \\ T_1(X) = X, \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad T_{k+1}(X) = 2XT_k(X) - T_{k-1}(X). \end{cases}$$

13. Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.
14. Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant (le justifier) ?

15. Montrer que T_n est le seul polynôme vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

16. En déduire de l'égalité, valable pour tout θ et tout k, $T_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$, une égalité faisant intervenir T_k et T_{k-2}.

Finalement, montrer que

$$\forall k \geq 1, \quad F_k = \mathrm{Vect}(T_k).$$