sem2 un sujet sur 4 jours

Dans tout ce problème, on désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 . On rappelle alors qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est nilpotent s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $f^k = 0$, et dans ce cas, on appelle indice de nilpotence p de f le plus petit entier k tel que $f^k = 0$. Ainsi, f est nilpotent d'indice p si et seulement si $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

On peut définir de façon analogue les matrices nilpotentes dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on notera $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices nilpotentes.

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ et des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour Mardi Exemples de matrices nilpotentes

1°) On considère dans cette question les deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dont les éléments sont tous nuls, à l'exception d'un seul qui est égal à 1) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les puissances des matrices A et B. Ces matrices sont-elles nilpotentes?

b) Calculer les puissances $(A+B)^q$ en distinguant les cas $q = 2k$ et $q = 2k+1$.

La matrice $A+B$ est-elle nilpotente?

c) Expliciter les matrices AB et BA.

Calculer les puissances des matrices AB et BA. Ces matrices sont-elles nilpotentes?

d) L'ensemble $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Pour mercredi : Une forme réduite des matrices nilpotentes

2°) Une propriété de l'indice de nilpotence

On considère dans cette question un endomorphisme nilpotent f d'indice p de $\mathbb{R}^n$, de sorte qu'il existe un vecteur non nul e_1 de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^{p-1}(e_1) \neq 0$ et que $f^p = 0$.

a) Montrer que la famille $\left(f^{p-1}(e_1), \ldots, f^2(e_1), f(e_1), e_1\right)$ est libre, puis que $p \leq n$.

(On composera une combinaison linéaire nulle de cette famille par $f, f^2, \ldots, f^{p-1}$).

b) En déduire qu'un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$ est nilpotent si et seulement si $g^n = 0$.

3°) Construction d'une base adaptée à un endomorphisme nilpotent : cas où $n = 3$

On considère dans cette question un endomorphisme nilpotent non nul f d'indice p de $\mathbb{R}^3$. D'après la question 2, l'indice de nilpotence p de f est alors égal à 2 ou 3 .

a) On suppose ici f nilpotent d'indice $p = 3$, et on note e_1 un vecteur tel que $f^2(e_1) \neq 0$.

- Montrer que la famille $\left(f^2(e_1), f(e_1), e_1\right)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
- Ecrire la matrice de f dans cette base.

b) On suppose ici f nilpotent d'indice $p = 2$, et on note e_1 un vecteur tel que $f(e_1) \neq 0$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, donc que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f))$.
- A l'aide du théorème du rang, en déduire que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.
- Justifier l'existence d'un vecteur e_3 complétant $f(e_1)$ en base de $\mathrm{Ker}(f)$, puis démontrer que la famille $(f(e_1), e_1, e_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
- Ecrire la matrice de f dans cette base.

Pour Jeudi

4°) Construction d'une base adaptée à un endomorphisme nilpotent : cas général

On considère dans cette question un endomorphisme nilpotent f d'indice p de $\mathbb{R}^n$, et on note e_1 un vecteur tel que $f^{p-1}(e_1) \neq 0$.

a) Pour $1 \leq k \leq p$, prouver l'inclusion $\operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right) \subset \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$.

Montrer que cette inclusion est stricte en considérant le vecteur $f^{p-k}(e_1)$.

b) Montrer que l'image par f du sous-espace $\operatorname{Ker}\left(f^k\right)$ est incluse dans $\operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right)$.

c) On considère une base $\mathcal{B}_1$ de $\operatorname{Ker}(f)$. Justifier l'existence d'une famille $\mathcal{B}_2$ complétant $\mathcal{B}_1$ en base de $\operatorname{Ker}\left(f^2\right)$, puis plus généralement, pour tout entier naturel k tel que $2 \leq k \leq p$, justifier l'existence d'une famille $\mathcal{B}_k$ complétant une base $\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_{k-1}$ de $\operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right)$ en base de $\operatorname{Ker}\left(f^k\right)$. Ainsi, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ forme une base de $\operatorname{Ker}(f^p) = \mathbb{R}^n$.

d) Ecrire par blocs la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ de $\mathbb{R}^n$ (on précisera avec soin les blocs qui sont nuls, sans chercher à expliciter les autres).

Quelle est la forme de la matrice obtenue, et que valent ses éléments diagonaux?

5°) Etude de la réciproque du résultat précédent

On considère une matrice triangulaire $T = (t_{ij})$ telle que $t_{ij} = 0$ pour $1 \leq j \leq i \leq n$.

a) Quel est le polynôme caractéristique de la matrice T ?

b) En déduire T^n sans aucun calcul à l'aide d'un théorème qu'on énoncera précisément.

PARTIE III : Dimension maximale d'un sous-espace $\mathcal{N}$ de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$

6°) Matrices symétriques réelles et matrices nilpotentes

a) Soit une matrice M appartenant au sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles.

- Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = D$ soit diagonale.
- En déduire que si de plus M est nilpotente, alors M est nulle.

b) Soit $\mathcal{N}$ un sous-espace vectoriel constitué de matrices nilpotentes.

Montrer que la somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{N}$ est directe, et en déduire que $\dim(\mathcal{N}) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

c) Exhiber un sous-espace $\mathcal{N}$ de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

PARTIE IV : Caractérisation de $\operatorname{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))$ à l'aide de la trace

7°) Trace d'une matrice nilpotente

On rappelle que la trace d'une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le réel $\operatorname{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_i$.

a) Montrer que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Tr}(M) \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En déduire la dimension du noyau $\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$ de l'application trace.

b) En exploitant le résultat obtenu à la question 4, démontrer l'inclusion $\mathcal{N}_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$, puis l'inclusion $\operatorname{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$. 8°) Etude de l'inclusion réciproque : cas où $n = 2$

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Lesquelles de ces trois matrices sont-elles nilpotentes?

b) On considère une matrice $(2,2)$ de trace nulle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

Montrer que M est combinaison linéaire des trois matrices N, E_{12}, E_{21}.

c) En déduire dans le cas $n = 2$ l'égalité : $\operatorname{Vect}(\mathcal{N}_2(\mathbb{R})) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$.

9°) Etude de l'inclusion réciproque : cas général

Pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, on désigne par E_{ij} la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui en position (i,j) qui est égal à 1 .

Pour $2 \leq i \leq n$, on désigne par N_i la matrice définie par $N_i = E_{11} - E_{1i} + E_{i1} - E_{ii}$.

a) Calculer E_{ij}^2 pour $i \neq j$ et N_i^2 pour $2 \leq i \leq n$.

b) On considère la famille $\mathcal{F}_n$ composée des $n^2 - n$ matrices E_{ij} pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ et $i \neq j$ et des $n-1$ matrices $N_i = E_{11} - E_{1i} + E_{i1} - E_{ii}$ pour $2 \leq i \leq n$.

- Montrer que la famille $\mathcal{F}_n$ est libre.
- En déduire une minoration de la dimension de $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})))$.

c) Justifier l'égalité $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

d) Démontrer que $\mathcal{F}_n$ est une base du sous-espace $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$, et étant donnée une matrice $M = (m_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle, exprimer M comme combinaison linéaire des matrices nilpotentes de la famille $\mathcal{F}_n$ en explicitant tous les coefficients.