Pour mardi

On pose $\forall n \geq 1, u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$

(a) Justifier l'existence de u_n et trouver une relation entre u_n et u_{n+1}.

(b) Trouver le réel α tel que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n) + \alpha \ln(n)$ converge vers une limite ℓ, et donner un équivalent de $v_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour mercredi minestelecom MP 2016

1. Après avoir étudié la convergence des intégrales, prouver l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\,\mathrm{d}t$$

2. On souhaite maintenant prouver que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable, i.e. que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

Prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \geq \frac{1-\cos(2t)}{2}$. En déduire le résultat.

Pour Jeudi classique mais difficile sans indication

Déterminer la nature et calculer la valeur de $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor\frac{1}{t}\right\rfloor\right) dt$ où $\lfloor\cdot\rfloor$ est la fonction partie entière.

On rappelle que $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \ln N + \gamma + o(1)$, ? $\gamma \approx 0,577$ est la constante d'Euler et appliquer la relation de Chasles avec les segments $[\frac{1}{k+1}, [\frac{1}{k}]$

Pour vendredi Chercher au moins quelques questions

$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = \frac{f(0)}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f et f' soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

1. Justifier le fait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$$

En déduire que f admet une limite en $+\infty$.

2. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = \frac{f(0)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t.$$

4. Dans cette question, on suppose que f'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = \frac{f(0)}{x} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

5. On ne suppose plus f'' intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et on se propose d'établir que le résultat de la question 4 reste vrai.

(a) Montrer le résultat suivant : si $[a, b]$ est un segment de R, si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^b g(t) \cos(xt) \mathrm{d}t = 0.$$

(b) Conclure.