

Exercice 1

On rappelle que :

$$\sin(p) - \sin(q) = \sin(p) + \sin(-q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Préliminaire.

1. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt$ et exprimer $\sin(a) - \sin(b)$.
2. On définit g ainsi

$$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

- (a) Déterminer un développement limité à l'ordre 1 de g . Que peut on en déduire ?
- (b) Déterminer une expression de $g'(x)$ pour x non nul. Déterminer un développement limité de g' en 0 à l'ordre 0. On vérifiera la compatibilité de ce résultat avec celui de la question précédente. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Calcul d'une intégrale

3. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$s_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt.$$

Déterminer la limite de $(s_n)_{n \geq 0}$. (on pourra faire une intégration par parties).

4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt) \cos(t)}{\sin(t)} dt$ existe.
5. Montrer à l'aide d'une démonstration par récurrence que la suite $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt) \cos(t)}{\sin(t)} dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante et donner sa valeur.
6. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

On sait donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ existe et est finie.

7. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t} dt$. A l'aide d'un changement de variables exprimer J_n à l'aide d'une intégrale dont l'intégrande ne dépend pas de n . En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

8. En considérant $I_n - J_n$, déduire des précédentes questions la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Exercice 2

On pose, lorsque cela est possible

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f .
2. En justifiant son existence, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.
3. Calculer $f(1)$. On pourra utiliser le changement de variables $u = e^x$.
4. Calculer $f(2)$. On pourra remarquer que la dérivée de $x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ est égale à $x \mapsto \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$.
5. Vérifier que f est positive sur I .
6. Montrer que f est décroissante sur I .
7. Soit $x \in I$. Démontrer la relation

$$f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$$

On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.

8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.
9. Pour tout réel $x > 0$, on pose

$$\phi(x) = x f(x) f(x+1)$$

Prouver que $\phi(x+1) = \phi(x)$. Calculer $\phi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

10. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.
11. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$. En déduire que

$$f(n) \underset[n \in \mathbb{N}^*]{n \rightarrow +\infty} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

12. En utilisant des parties entières, prouver que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

13. Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Exercice 3

I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Dans tout le sujet si $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et c un réel strictement positif. On définit

$$\forall x \in I, \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t) dt.$$

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et donner une expression de φ' . Montrer que φ est solution du problème de Cauchy :

$$y' + cy = f \text{ et } y(0) = 0.$$

2. Dans cette question, I désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et, pour tout réel $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}.$$

(a) Déterminer $\varphi(f_\lambda)$.

(b) Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont intégrables sur I . Calculer $\int_0^{+\infty} f_\lambda$ et $\int_0^{+\infty} \varphi(f_\lambda)$.

(c) Démontrer que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur I . Calculer $\int_0^{+\infty} f_\lambda^2$ et $\int_0^{+\infty} \varphi(f_\lambda)^2$.

Exercice 4

1. Soit $x \in [1, +\infty[$, calculer :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt.$$

2. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ est-elle convergente ? (le justifier). En déduire, en précisant bien toutes les hypothèses du théorème utilisé que

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} (\ln(x))^2.$$

La question suivante permet d'être plus précis et redémontre le résultat.

3. En exprimant différemment :

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt,$$

montrer qu'il existe un réel C tel que

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + C + \epsilon(x)$$

où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon(x) = 0$.

4. Donner un équivalent de la fonction ϵ au voisinage de $+\infty$.

Annexe

Liste des résultats et techniques utilisées :

- TFA
- IPP (plusieurs fois)
- Changement de variables (plusieurs fois)
- Intégration des relations de comparaison
- Formules trigonométriques
- Etude d'une intégrale généralisée (tout le temps)
- Calcul de primitives pas trop compliquées.
- Savoir montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Caractérisation séquentielle des limites.