

Pour mardi

Exo 1 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme tel que :

$$P(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad AB = P(A).$$

Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Exo1 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{où } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$$

On suppose que P et Q sont des polynômes annulateurs de A et B respectivement. Déterminer un polynôme annulateur de M .

Mercredi

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant 0 comme racine simple et annulateur de u .

- a) Montrer que $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$.
- b) En déduire que

$$\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E.$$

Pour Jeudi

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u , E est supposé de dimension finie. On suppose également que $P = QR$ où Q et R sont premiers entre eux.

Montrer que :

$$\text{Im}(P(u)) = \text{Ker}(R(u)).$$

Pour vendredi

Pour $f \in E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on note $\tilde{f} : x \mapsto f(-x)$. Soit φ l'endomorphisme de E défini par $\forall f \in E; \varphi(f) = \tilde{f}$. Déterminer un polynôme annulateur de φ et en déduire ses valeurs propres.