Exercice 1

1. (a) $\underline{f_{|E_\lambda} = \lambda \mathrm{Id}_{|E_\lambda}}$, or $f \circ g = g \circ f$ donc E_λ est stable par g donc $\underline{g_{|E_\lambda} \text{ existe}}$.

   (b) Une restriction d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable , de plus toutes les bases de E_λ diagonalisable l'homothétie $f_{|E_\lambda}$. Or $\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp} f} E_\lambda = E$ car f est diagonalisable.

   On choisit pour chaque sous-space propre des bases de diagonalisations de $g_{|E_\lambda}$ que l'on concatène pour obtenir une base commune.

2. Par récurrence sur n il existe une C_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$M^n = \begin{pmatrix} A^n & C_n \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$$

En effet, c'est vrai pour $n = 0$, avec $C_0 = 0$ (et pour $n = 1$ avec $C_1 = C$). Si c'est vrai au rang n, alors

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} A^n & C_n \\ 0 & B^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{n+1} & A^n C + C_n B \\ 0 & B^{n+1} \end{pmatrix}$$

donc c'est vrai au rang $n + 1$, avec $C_{n+1} = A^n C + C_n B$.

Alors, pour tout $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $p \geqslant 1$ de $\mathbb{C}[X]$, on a

$$P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k = \begin{pmatrix} P(A) & D \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$$

avec $D = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k C_k = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k C_k$.

3. Comme M est diagonalisable il existe un polynôme scindé à racines simples tel que $P(M) = 0$ et avec le résultat précédent on a

$$P(A) = P(B) = 0.$$

4. Les deux matrices A et B admettent donc un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc, par théorème, elles sont diagonalisables.

5. (a) On a

$$MN = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & CB \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$$
$$\text{et } NM = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & AC \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$$

   Avec l'hypothèse $AC = CB$, on en déduit $\underline{MN = NM}$.

   (b) Les préliminaires ont montré ce résultat pour les endomorphismes : existence d'une base commune de diagonalisation, c'est la traduction matricielle.

   (c) On a alors $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M - N = R^{-1} \left(D - D' \right) R$, donc $M - N$ est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable.}$$

(d) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et nilpotente, son polynôme minimal divise X^n et est scindé à racines simples, c'est X donc
$\underline{C = 0}$

exercice 2

1. Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a

$$\chi_F(X) = \det\left(-F + X \cdot I_n\right) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}_n$$

et en développant suivant la première colonne, on a

$$\chi_F(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ X & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X & -1 \end{vmatrix}_{n-1},$$

c'est-à-dire finalement $\chi_F(X) = (X^n - 1)$

Les valeurs propres de F sont donc les n racines n-ièmes de l'unité : $\lambda_k = \exp\left[\dfrac{2ik\pi}{n}\right]$, pour $k \in \{1, \cdots, n\}$ (numérotée ainsi pour la suite)

2. La matrice F ayant un polynôme caractéristique scindé à racines simples, F est diagonalisable (et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles). Comme 0 n'est pas valeur propre, F est inversible

3. Avec le théorème de Cayley-Hamilton on a $F^n = I_n$, et donc $F^p = F^r$ où r est le reste de la division euclidienne de p par n.

4. D'après la question précédente $G = \text{Vect}\left\{F^k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$. De plus le polynôme minimal de F a les mêmes racines que son polynôme caractéristique , c'est donc son polynôme caractéristique (n racines distinctes).

La famille $\left(F^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre car si elle était liée on aurait l'existence d'un n-uplet non nul $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ de $\mathbb{C}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k F^k = 0$, c'est-à-dire un polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, annulateur de F et de degré strictement inférieur à n, ce qui est contradictoire avec le fait que le polynôme minimal est de degré n.

Finalement,

$\dim[\text{Vect}(G)] = n$ et $\left(F^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de $\text{Vect}(G)$.

5. D'après les remarques faites aux questions précédentes :

$$\text{tr}\left(F^p\right) = \begin{cases} n & \text{si } p \in n\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } p \notin nZ \end{cases}$$

6. On sait que F est diagonalisable, donc il existe un Q de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $Q^{-1}FQ = D$, avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

$$\text{Si } P(X) = \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}, \text{ on a alors}$$
$$Q^{-1}P(F)Q = P(D) = \operatorname{diag}[P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n)]$$

ce qui donne les valeurs propres de $A = P(F)$ (et aussi, en passant, la diagonalisibilité de A)
On a $\lambda_1 = 1$, donc $P(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Si on pose $R(X) = X^n - 1 = (X-1)S(X)$, avec $S(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$, on a

$$nX^{n-1} = R'(X) = S(X) + (X-1)S'(X)$$

avec $S'(X) = \sum_{k=1}^{n-1} kX^{k-1} = P(X) - nX^{n-1}$, c'est-à-dire

$$P(X) = \frac{nX^{n-1} - \frac{X^n-1}{(X-1)}}{X-1} + nX^{n-1} = n\frac{X^n}{X-1} - \frac{X^n-1}{(X-1)^2}$$

Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on a $P(\lambda_k) = \frac{n}{\lambda_k - 1}$.
Compte-tenu de notre indexation des racines de l'unité on obtient : les valeurs propres de A sont $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} \cup \left\{\frac{n}{\lambda_k - 1}, 2 \leqslant k \leqslant n\right\}$.

7. On a alors $\det(A) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{k=2}^{n} \frac{n}{\lambda_k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2\prod_{k=2}^{n}(\lambda_k - 1)}$.
Les $(\lambda_k - 1)$ pour $k \in [\![2, n]\!]$ sont les racines du polynôme

$$S(X+1) = \sum_{k=0}^{n-1} (X+1)^k$$

qui est scindé, de degré $n-1$, de coefficient dominant 1 et de terme constant n (somme des termes constants des $(X+1)^k$), donc avec les formules de Newton (relations coefficients-racines pour les polynômes scindés), on a

$$\prod_{k=2}^{n} (\lambda_k - 1) = (-1)^{n-1}\frac{n}{1} = (-1)^{n-1}n$$

Finalement, $\det(A) = (-1)^{n-1}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$.

8. Le déterminant de A étant non nul, A est inversible. Le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$\chi_A(t) = t^n + ... + (-1)^n det(A)$$

Avec le théorème de Cayley-Hamilton, on a
$A^n + ... + (-1)^n det(A)I_n = 0$
$A \times (A^{n-1} + ... + a_{n-1}I_n) = -det(A)I_n$
c'est-à-dire $A^{-1} \in \operatorname{Vect}\left(\left\{A^k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}\right)$.

9. On pose $H = \mathrm{Vect}(G)$.
Pour tout k de $\mathbb{N}, A^k = [P(F)]^k = P^k(F) \in H$ (l'application $P \mapsto P(F)$ est un morphisme d'algèbre). Comme $\left\{F^k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$ est une base de H, il existe un (unique) $(u_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ tel que $A^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k$.

10. Avec $(X-1)^2 P(X) = n(X-1)X^n + (X^n - 1)$ (et $F^n = I_n$), on obtient
$$(F - I_n)^2 A = n\,(F - I_n)\,.$$

11. On en tire $(F - I_n)^2 = n\,(F - I_n)\,A^{-1}$, c'est-à-dire, pour $n \geqslant 4$
$$F^2 - 2F + I_n = n\left[\sum_{k=0}^{n-1} u_k F^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k\right],$$
$$F^2 - 2F + I_n = n\left[(u_{n-1} - u_0)\,I_n + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k-1} - u_k)\,F^k\right],$$
$$\left(u_{n-1} - u_0 - \frac{1}{n}\right) I_n + \left(u_0 - u_1 + \frac{2}{n}\right) F + \left(u_1 - u_2 - \frac{1}{n}\right) F^2 + \sum_{k=3}^{n-1} (u_{k-1} - u_k)\,F^k = 0.$$
La famille $\left(F^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ étant libre on obtient
$$\begin{cases} u_{n-1} - u_0 = \dfrac{1}{n} \\ u_0 - u_1 = -\dfrac{2}{n} \\ u_1 - u_2 = \dfrac{1}{n} \\ \forall k \in [\![3, n-1]\!] u_{k-1} = u_k \end{cases}$$
ce qui est équivalent à $\begin{cases} u_2 = u_3 = \cdots = u_{n-1} \\ u_2 - u_0 = \dfrac{1}{n} \\ u_1 - u_2 = \dfrac{1}{n} \end{cases}$.

12. Avec 7 et la linéarité de la trace, on a $\mathrm{tr}(A) = n u_0$.
La matrice A^{-1} a pour valeurs propres les inverses de celles de A, donc, avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$ c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lambda_k = -1$,
$$\mathrm{tr}(A) = \frac{2}{n(n+1)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k - 1}{n} = \frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \lambda_k - \frac{n-1}{n} = \frac{2}{n(n+1)} - 1 = \frac{2 - n - n^2}{n(n+1)}$$
Finalement, $u_0 = \dfrac{2 - n - n^2}{n^2(n+1)}$.

13. Alors $u_2 = \dfrac{1}{n} + \dfrac{2 - n - n^2}{n^2(n+1)} = \dfrac{2}{n^2(n+1)}$ et $u_1 = u_2 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2 + n + 2}{n^2(n+1)}$ et finalement $A^{-1} = \dfrac{1}{n^2(n+1)} \cdot \left[\left(2 - n - n^2\right) I_n + \left(n^2 + n + 2\right) F + 2\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} F^k\right]$,

ou si l'on préfère,

$$A^{-1} = \frac{1}{n^2(n+1)} \begin{pmatrix} a_n & b_n & 2 & \dots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_n \\ 2 & \dots & \dots & 2 & a_n \end{pmatrix}, \text{ où } a_n = 2 - n - n^2 \text{ et } b_n = n^2 + n + 2.$$

Pb ccinp 2009

I. EXEMPLES

1. (a) Le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$ est
$\chi_{M(\alpha)}(X) = -X^3 + \operatorname{tr}(M(\alpha))X^2 - \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(M(\alpha)))X + \det(M(\alpha))$
$= -X^3 + (5-\alpha)X^2 - (8-3\alpha)X + (4-2\alpha)$
$= (1-X)(2-X)((2-\alpha)-X)$.
Les racines de $\chi_{M(\alpha)}$ sont bien les éléments diagonaux de $M(\alpha)$.
$\boxed{\text{Pour tout } \alpha, \text{ la matrice } M(\alpha) \text{ est une matrice à diagonale propre.}}$

(b) Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ alors les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont deux à deux distinctes, $M(\alpha)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 0$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2.
$\operatorname{rg}(M(0) - 2I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, la dimension de E_2 est donc 2 et $M(0)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 1$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.
$\operatorname{rg}(M(1) - I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, la dimension de E_1 est donc 1 et $M(0)$ n'est pas diagonalisable.
$\boxed{M(\alpha) \text{ est diagonalisable si et seulement si } \alpha \neq 1.}$

2. $\chi_A(X) = -X^3 - X$.
χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas à diagonale propre.}}$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$.
Soit $Q(X) = (X-a)(X-d) = X^2 - (a+d)X + ad$.
la matrice A est à diagonale propre si et seulement si $\chi_A = Q$, c'est à dire si et seulement si $bc = 0$.
$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc l'ensemble des matrices triangulaires.}}$

II. TEST DANS LE CAS $n = 3$

4. Pour une matrice à diagonale propre, le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux.
$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls}}$
Il suffit de prendre une matrice triangulaire, non diagonale et inversible:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A est une matrice à diagonale propre si et seulement si son polynône caractéristique est égal à $-(a_{11} - X)(a_{22} - X)(a_{33} - X)$
En développant ces deux polynômes et par unicité de leurs coefficients on trouve que
$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ est une matrice à diagonale propre si et seulement si} \\ \det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii} \text{ et } a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0 \end{array}}$$

6. Pas de difficulté

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7. (a) Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice par blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si les matrices A et C sont des matrices carrées d'ordre r et s à diagonale propre, alors M est une matrice à diagonale propre.

En effet, d'après la question précédente,

$\chi_M(X) = \det \begin{pmatrix} A - XI_r & B \\ 0 & C - XI_s \end{pmatrix} = \det(A - XI_r)\det(C - XI_s) = \chi_A(X)\chi_C(X)$

Les matrices A et C étant à diagonale propre, les valeurs propres de M sont ses éléments diagonaux.

On prend alors $A = (1)$ (matrice à diagonale propre car triangulaire), $B = (111)$ et $C = L$ (définie à la question 6, matrice à diagonale propre dont tous les termes sont non nuls)

On obtient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\boxed{M \text{ est à diagonale propre et contient bien treize réels non nuls}}$

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ où les matrices A, B et C sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne contiennent aucun terme nul.

De même qu'en a), $\chi_M(X) = \chi_A(X)\chi_C(X)$.

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Si a ou d est valeur propre de A, alors χ_A est scindé et $\operatorname{tr} A = a + d$, les valeurs propres de A sont alors a et d, la matrice A est alors à diagonale propre et d'après la question 3. c'est une matrice triangulaire ce qui est impossible car la matrice A ne contient aucun terme nul.

Donc, les valeurs propres de A sont e et h et les valeurs propres de C sont a et d.

On en déduit $\chi_A(X) = (X - e)(X - h)$ et $\chi_C(X) = (X - a)(X - d)$.

En développant ces polynômes , on obtient les relations: $\begin{cases} a + d = e + h \\ ad - bc = eh \\ eh - gf = ad \end{cases}$

Il suffit de trouver des réels a, b, c, d, e, f, g et h tous non nuls vérifiant ces équations et de prendre une matrice B quelconque ne contenant aucun terme nul.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

On obtient : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

IV. QUELQUES PROPRIETES

8. On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les valeurs propres de A sont a_{11}, a_{22} ... a_{nn}.

Les valeurs propres de $aA + bI_n$ sont $a.a_{11} + b$, $a.a_{22} + b$ ... $a.a_{nn} + b$.

Ce sont les termes diagonaux de $aA + bI_n$,

$\boxed{aA + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$

Les termes diagonaux et les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes, et ${}^t(aA + bI_n) = a\,{}^tA + bI_n$,

$\boxed{a\,{}^tA + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$

9. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable et aussi trigonalisable, mais d'après la question 3., elle n'est pas à diagonale propre.

$\boxed{\text{Une matrice trigonalisable n'est pas nécessairement à diagonale propre.}}$

(b) Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé, une telle matrice est donc trigonalisable.

$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est trigonalisable}}$

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si A est semblable à une matrice B à diagonale propre, alors $P_A = P_B$ et P_B est scindé, donc P_A est scindé.

Si P_A est scindé, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, or toute matrice triangulaire est à diagonale propre donc A est semblable à une matrice à diagonale propre.

$\boxed{A \text{ est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si } P_A \text{ est scindé.}}$

10. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme toute matrice triangulaire est à diagonale propre, il suffit d'écrire A comme une somme de deux matrices triangulaires:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \geq 2$ il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas à diagonale propre, par exemple la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice s'écrit comme somme de deux matrices à diagonale propre, donc

$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$