Exercice 1

Préliminaire : codiagonalisation. Soient f et g deux endomorphimes d'un espace vectoriel E. On suppose que f et g sont diagonalisables et que $f \circ g = g \circ f$. On note, si λ est une valeur propre de f $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$.

1. (a) Que vaut $f_{|E_\lambda}$, et justifier que $g_{|E_\lambda}$ existe.
   (b) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle les matrices de f et g sont diagonales.
   On dit alors que f et g sont codiagonalisables

   Soit M une matrice carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs par $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A, B, C sont trois matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On suppose que la matrice M est diagonalisable et que $AC = CB$.
2. Montrer que pour tout polynôme P à coefficients complexes, il existe une matrice D carrée d'ordre n telle que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & D \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$.
3. Montrer qu'il existe un polynôme P à coefficients complexes scindé à racines simples vérifiant $\begin{cases} P(A) = 0 \\ P(B) = 0 \end{cases}$.
4. En déduire que les matrices A et B sont diagonalisables.

   Soit N la matrice carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs par $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
5. (a) Montrer que $MN = NM$.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice R inversible et deux matrices diagonales D et D' telles que :
   $M = R^{-1}DR$ et $N = R^{-1}D'R$.
   (c) En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
6. Montrer que la matrice C est nulle .

Exercice 2

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $E = M_n(\mathbf{C})$. La matrice identité de E est notée I_n.

Soit $F = (f_{ij})$ la matrice de E définie par : $\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, f_{i,i+1} = 1 \\ f_{n,1} = 1 \\ fij = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de F est $X^n - 1$ et déterminer les valeurs propres de F.

   On note $\{\lambda_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ les valeurs propres de F.
2. La matrice F est-elle diagonalisable dans E ? La matrice F est-elle inversible ?
3. Calculer F^p où $p \in \mathbf{Z}$.

   Soit $G = \{F^p, p \in \mathbf{Z}\}$.
4. Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Vect}(G)$.
5. Calculer la trace d'un élément de G.

   Soit le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$ et $A = P(F)$.

6. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de la matrice A est :

$$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} \cup \left\{\frac{n}{\lambda_k - 1}, 1 \leqslant k \leqslant n-1\right\}.$$

On pourra montrer que si $R(X) = X^n - 1 = (X-1)S(x)$ alors
$S'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} kX^{k-1} = P(X) - nX^{n-1}$ et calculer $P(1)$ par une autre méthode.

7. Vérifier que : $\det(A) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)n^{n-1}}{2}$.
8. On se propose dans cette question de déterminer l'inverse de la matrice A.
   (a) Prouver que : $A^{-1} \in \mathrm{Vect}\left(\left\{A^k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}\right)$.
   (b) En déduire qu'il existe des scalaires $(u_j)_{0\leqslant j\leqslant n-1}$ tels que : $A^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k$.
   (c) Montrer que : $(F - I_n)^2 A = n(F - I_n)$.
   (d) Prouver que : $\begin{cases} u_2 = u_3 = \ldots = u_{n-1} \\ u_2 - u_0 = \dfrac{1}{n} \\ \\ u_1 - u_2 = \dfrac{1}{n} \end{cases}$
   (e) En calculant de deux façons différentes la trace de la matrice A^{-1}, déterminer la valeur de u_0.
   (f) En déduire A^{-1}.

Problème :MATRICES DONT LES VALEURS PROPRES SONT SUR LA DIAGONALE

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Ce problème s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.

Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geqslant 2$. On dira qu'une matrice $A = (aij)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$$

On pourra noter en abrégé : A est une **MDP** pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

I. EXEMPLES

1. Soit α un réel et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$
   (a) Calculer, en donnant le détail des calculs, le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$. Démontrer que, pour tout α, la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.
   (b) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice A est-elle une matrice à diagonale propre ?
3. Cas n = 2
Déterminer $\mathcal{E}_2$.

II. TEST DANS LE CAS n = 3

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible. Donner un exemple de matrice à diagonale propre (non diagonale) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et telle que A^{-1} est également une matrice à diagonale propre. On donnera A^{-1}
5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, démontrer que A est une matrice à diagonale propre si et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes : $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ et $a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0$
6. Vérifier que la matrice suivante :

$$L = A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

est à diagonale propre.

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par blocs (les matrices A et C étant des matrices carrées), on rappelle que

$$\det M = (\det A)(\det C).$$

7. Donner un exemple d'une matrice M à diagonale propre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (matrice 4×4) dans chacun des cas suivants :
   (a) La matrice M contient treize réels non nuls (on expliquera brièvement la démarche).
   (b) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où les matrices A, B et C sont toutes des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucun terme nul (on expliquera brièvement la démarche).

IV. QUELQUES PROPRIÉTÉS

8. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et les matrices $aA^T + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.
9. *Matrices trigonalisables*
   (a) Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?
   (b) Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.
   (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.
10. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre. $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?