

Pour Mardi

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

- a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 b) Vérifier

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

- c) Montrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leq \|A\|$.

Pour Mercredi

Soit E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$, pour tout $f \in E$, on pose :

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + f''(x)|, \quad N_1(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E .
2. Montrer que N_∞ n'est pas équivalente ni à N_1 ni à N .
3. Montrer que N et N_1 sont équivalentes (introduire l'équation différentielle $y'' + y = 0$).

Pour jeudi

Soient $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t) dt}.$$

- a) Montrer que N définit une norme sur E .

Pour cela on pourra introduire un candidat produit scalaire $\langle f, g \rangle$ tel que $N(f) = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ et démontrer que c'est bien un produit scalaire.

- b) Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

Pour cela, commencer par écrire classiquement $f(x)$ à l'aide de la primitive de sa dérivée.

De plus :

$$\int_0^1 |f'(t)| \times 1 \leq N_2(f') \times N_2(1).$$

Finalement, on trouve $\|\cdot\|_\infty \leq \sqrt{2}N$.

Pour démontrer que N n'est pas dominée par $\|\cdot\|_\infty$ on pourra considérer les fonctions $f_n(t) = \sin(2\pi n t)$.

Pour vendredi exercice sur $L^2([0, +\infty[)$

Soit $E = \{f : [0, +\infty[, \text{ continue et telle que } \int_0^{+\infty} f^2 \text{ converge} \}$.

a) Montrer que pour tout réel a et b , on a

$$|2ab| \leq a^2 + b^2.$$

b) Montrer que E est un espace vectoriel.

c) Montrer que $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} fg$ est un produit scalaire sur E , on note N_2 la norme associée.

d) Ecrire l'inégalité $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$.

e) Soit ϕ une fonction continue bornée. Montrer que l'application

$$u : f \mapsto \phi f$$

définit un endomorphisme continu de E .

g) Soient x_0 fixé dans $\mathbb{R}$ et f_n la fonction continue valant 1 en x_0 , affine sur $[x_0 - 1/n, x_0]$ et $[x_0, x_0 + 1/n]$ et nulle ailleurs. Montrer que pour une fonction g définie continue sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} f_n^2 g}{\int_{\mathbb{R}} f_n^2} = g(x_0).$$

h) Calculer la norme de l'endomorphisme u défini à la première question. (hors programme c'est à dire trouver le meilleur k pour k -lip).