Comparaison de normes

[-] Calcul de distance à une partie [-] Équivalence de normes en dimension finie

Exercice 1 0217 ★

On considère les normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n$$

et déterminer, pour chaque inégalité, un vecteur x non nul réalisant l'égalité.
(b) Comparer de même $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ d'une part, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ d'autre part.

Exercice 2 0218 ★★ CCINP (MP) Correction

On note E l'espace des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$.

(a) Montrer que

$$N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

définissent des normes sur l'espace E.
(b) Montrer que

$$N(u) \leq 2N_\infty(u) \quad \text{pour tout } u \in E.$$

Déterminer une suite non nulle telle qu'il y ait égalité.
(c) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 3 0219 ★★ Correction

On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
On définit des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ en posant

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|, \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

(a) Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.
(b) Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 4 0220 ★★ Correction

On note $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles sommables. Cet espace est normé par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

(a) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Montrer que u est bornée.
Cela permet d'introduire la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.
(b) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Montrer que u est de carré sommable
Cela permet d'introduire la norme $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2}.$$

Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 5 0221 ★★ Correction

On note $\mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées normé par $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Soit $a = (a_n)$ une suite réelle. Former une condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que l'application

$$N_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n|$$

définit une norme sur $\mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
(b) Comparer N_a et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6 0725 ★★ Correction

On note $E = \mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées.
Pour $a \in]0;1]$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on pose

$$N_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n |x_n|.$$

(a) Montrer que N_a définit une norme sur E.
(b) Soient $a, b \in]0;1]$ distincts. Comparer les normes N_a et N_b.

Exercice 7 0406 ★★ Correction

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \quad \text{et} \quad N_\infty(P) = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$$

avec (a_k) la suite des coefficients définissant P.
(a) Justifier que N_1 définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
On établit de façon analogue que N_∞ définit aussi une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
(b) Comparer les normes N_1 et N_∞.

Exercice 8 0731 ★★ Correction

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t\in[-1;1]} |P(t)|.$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
(b) Étudier la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n} X^n.$$

(c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes?

Exercice 9 0402 ★★ Correction

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(a) Établir que N_a définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
(b) Justifier que, pour tous $a, b \in [0;1]$, les normes N_a et N_b sont équivalentes.
(c) On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $P_n = X^n/2^n$. Pour quelle(s) norme(s) N_a peut-on affirmer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge?
(d) Montrer que pour $a \in]0;1]$ et $b \in]1;+\infty[$, les normes N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

Exercice 10 406 ★ Correction

Soit $E = \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{[0;1]} |f|.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ mais qu'elle n'équivaut ni à l'une, ni à l'autre.
(b) Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 11 405 ★★ Correction

On considère $E = \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0;1]$ vers $\mathbb{R}$.
(a) Pour $f \in E$, on pose $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Montrer que N définit une norme sur E.
(b) Pour $f \in E$, on pose $N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On vérifie aisément que N' est aussi une norme sur E. Montrer que la norme N' est équivalente à N.
(c) Les normes N et N' sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 12 407 ★★ Correction

Soit $E = \mathscr{C}^1([-1;1],\mathbb{R})$. On définit N_1, N_2 et N_3 par

$$N_1(f) = \sup_{[-1;1]} |f|, \quad N_2(f) = |f(0)| + \sup_{[-1;1]} |f'| \quad \text{et} \quad N_3(f) = \int_{-1}^{1} |f|.$$

(a) Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E.
(b) Comparer N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part.

Exercice 13 465 ★★ CENTRALE (MP) Correction

Soient $E = C^1([0;1],\mathbb{R})$ et $N : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

(a) Montrer que N définit une norme sur E.
(b) Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 14 2067 ★★ Correction

Soient l'espace $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R}) \;\middle|\; f(0) = 0 \right\}$ et N_1, N_2 les applications définies sur E par

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

(a) Vérifier que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.
(b) Montrer que N_2 est dominée par N_1.
(c) En exploitant l'identité

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t))\,e^t\,\mathrm{d}t$$

montrer que N_1 est dominée par N_2.

Exercice 15 2410 ★★ CENTRALE (MP)

Sur l'espace $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R}) \;\middle|\; f(0) = 0 \right\}$, on considère l'application N définie par

$$N(f) = \|3f + f'\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |3f(t) + f'(t)|.$$

(a) Montrer que N définit une norme sur E.
(b) Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq \alpha N(f)$ pour toute fonction f de E.
(c) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes?

Exercice 16 964 ★★ Correction

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0;1]} |f'(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x) + f'(x)|.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 17 2670 ★★ Correction

Soient $E = \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\varphi = \sup_{t\in[0;1]} \left\{ |f(t)|\,\varphi(t) \right\}.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_\varphi$ est une norme sur E
(b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.
(c) Les normes $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ et $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ sont-elles équivalentes?

Exercice 18 2767 ★★ MINES (MP)

Soient $E = \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ et E^+ le sous-ensemble de E constitué des fonctions positives qui ne s'annulent qu'au plus un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_\varphi$ définit une norme sur E.
(b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+, les normes associées sont équivalentes.
On considère les fonctions φ_1 et φ_2 de E^+ déterminées par

$$\varphi_1(t) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) = t^2 \quad \text{pour tout } t \in [0;1].$$

(c) Les normes $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ et $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ sont-elles équivalentes?

Exercice 19 2811 ★★★ CENTRALE (MP) Correction

Soit

$$E = \left\{ f \in \mathscr{C}^2([0;\pi],\mathbb{R}) \;\middle|\; f(0) = f'(0) = 0 \right\}.$$

(a) Montrer que

$$N : f \mapsto \|f + f''\|_\infty$$

est une norme sur E.
(b) Pour $f \in E$, on pose

$$N' : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty.$$

On vérifie aisément que N' est une norme sur E. Montrer que la norme N' est équivalente à N.

Exercice 20 3410 ★★★ CENTRALE (MP) Correction

(a) Quelles sont les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application

$$(x,y) \mapsto N_a(x,y) = \sqrt{x^2 + 2axy + y^2}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Si N_a et N_b sont des normes, calculer

$$\inf_{(x,y)\neq(0,0)} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)} \quad \text{et} \quad \sup_{(x,y)\neq(0,0)} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}$$

[-] Calcul de distance à une partie [-] Équivalence de normes en dimension finie