

Pour Mardi.

Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2}$.

1. Montrer par la méthode que vous voulez :

$$\forall x \in [0, 1], \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

2. En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2}$ à l'aide d'autres sommes.
3. En écrivant $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2}$ à l'aide d'une somme de Riemman montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indication : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n} \left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx + o(1) \right)$ au voisinage de $+\infty$

4. Montrer à l'aide d'une majoration grossière :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} \leq \frac{1}{6n^5},$$

5. Conclure que

$$\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Pour Mercredi

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}.$$

1. Montrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ converge vers une constante C .
2. Etablir que

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour Jeudi

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. on s'intéresse à la propriété suivante :

$$(P) \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \iff u_n + u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

1. Montrer que l'implication de gauche à droite est toujours vérifiée.
2. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Montrer que la propriété (P) est réalisée.
3. La propriété (P) est elle vraie pour toute suite ?

remarque pour la question traiter le cas croissant par exemple, et écrire des encadrements de $2u_n$.

Pour vendredi

La suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \geq 0$ et $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ si $n \geq 1$.

- 1) Montrer que, pour tout $a \geq 0$, $\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(1 + a)$.
- 2) Prouver que $\sqrt{n} \leq u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.
- 3) Démontrer que $u_n \sim \sqrt{n}$.
- 4) Soit $w_n = u_n - \sqrt{n}$. Établir que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite L à préciser.