Pour Mardi

Travailler les exercices 8,9, 10 et 11 de la banque

Pour Mercredi

Travailler les exercices 14 , 15, 16 et 17

Pour Jeudi.

Partie III : étude de séries de fonctions

III - 1. Un premier exemple.

III - 1.1. Pour tout $x \in]-1,1[$, calculer $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ ainsi que $F'(x)$.

III - 1.2. Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} F(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F'(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)^2F'(x)$.

III - 2. Un deuxième exemple.

Dans cette question, pour tout $x \in]-1,1[$, on pose cette fois : $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

III - 2.1. Soit $a \in]0,1[$. Prouver la convergence normale de cette série de fonctions sur le segment $[-a,a]$.

En déduire que F est définie et continue sur $]-1,1[$.

III - 2.2. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1-x^n}{1-x} \leqslant n$.

En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x)$.

Pour Vendredi

III - 3. Dans cette question, f est une application réelle continue et croissante sur $[0,1[$ avec $f(0) = 0$ et telle que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0,1[$.

Soit $x \in]0,1[$.

III - 3.1. Justifier l'existence de $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x^t)\,\mathrm{d}t$ et l'égalité $G(x) = -\dfrac{1}{\ln(x)} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

III - 3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} f(x^t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x^t)\,\mathrm{d}t.$$

III - 3.3. En déduire l'existence de $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$, ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x.

III - 3.4. Conclure avec soin que $\displaystyle\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

III - 4. Un dernier exemple.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose enfin cette fois : $F(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

III - 4.1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et exprimer sa dérivée sous la forme d'une série de fonctions.

III - 4.2. Grâce à **III-3.4**, montrer que $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}}(1-x)F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u$ étudiée en **I-3.**

III - 4.3. Par une méthode similaire à celle de **III-3**, montrer que :

$$\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} \left((1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \right) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u.$$

En déduire $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}}((1-x)^2 F'(x))$.

Pour les plus courageux

Supp1.

Exercice 1 (Étude de convergence)**.** On pose $f_0(t) = 0$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$, pour $t \geqslant 0$.

1. Déterminer la limite simple, ℓ, des fonctions f_n.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
3. Démontrer que : $\forall\, t > 0,\ |f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leqslant \dfrac{|f_n(t) - \ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. (Remarquer que $f_n - \ell$ est bornée pour $n \geqslant 1$)

Correction 1.

1. $\ell(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t = 0 \\ \dfrac{1+\sqrt{1+4t}}{2} \text{ si } t > 0. \end{cases}$
2.
3. Accroissements finis.
4.

Supp 2

Exercice 2 (Théorème d'Ascoli)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions $[a, b] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers f. On suppose que toutes les fonctions f_n sont k-Lipchitizennes (avec le même k).

1. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$ une subdivision régulière de $[a, b]$. On note $M_n = \max\{|f_n(a_i) - f(a_i)| \text{ tel que } 0 \leqslant i \leqslant N\}$. Encadrer $\|f_n - f\|_\infty$ à l'aide de M_n.
2. Montrer que f_n converge uniformément vers f.