barème sur 70 points probablement total divisé par 2 ou 2,5

Exercice 1 20 min 10 points

On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par $\forall A \in E,\ N(A) = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Sup}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}$ (on admet que N est une norme sur E).

1. Montrer que N est une norme d'algèbre, c'est à dire :

$$\forall (A,B) \in \Big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\Big)^2,\ N(A\times B) \leq N(A)N(B).$$

2. Soit f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall A \in E,\ f(A) = \text{Tr}(A)$. Démontrer que l'application f est continue sur (E,N) et déterminer $|||f|||$.

Exercice 2 30 min 10 points

Exercice 1. Pour tout polynôme réel P, écrit sous la forme $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k$, on note

$$\|\mathrm{P}\| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1/2} |\mathrm{P}(x)| \quad \text{et} \quad \mathrm{N}(\mathrm{P}) = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}$$

a. Prouver que $\|\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
b. Montrer que la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme $\|\|$ et vers 1 pour la norme N.
c. *plus délicat* Construire une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour laquelle la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X.

Exercice 3 : suites de fonctions 40 min 13 points)

1. Soit n un entier naturel. On considère la fonction de la variable réelle x définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}$.
(a) Etablir le tableau de variation de f_n sur l'intervalle $[0,1]$.
(b) Représenter sur un même graphique les graphes des fonctions f_0, f_1 et f_2.
2. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on explicitera. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers f sur $[0,1]$?

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$$

3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone (on précisera le sens de monotonie) qui converge vers 0 .
4. Démontrer que

$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}dx$$

5. En déduire un équivalent pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 2H 30 37 points =15+11+11

Partie I (séries numériques)

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. (a) Rappeler le mode de convergence de cette série et à l'aide d'une comparaison série intégrale montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

(b) On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$. Déterminer la monotonie de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$. En utilisant la comparaison, série intégrale de la question précédente, montrer que $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est minorée. Conclure que $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers un limite notée l.

On va retrouver ce résultat en utilisant le lien suite série et même un peu plus.

(c) Donner un équivalent de $v_{n+1} - v_n$ de la forme $\frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$ où C est une constante à déterminer , en déduire que la série $\sum_{n\geq 1}(v_{n+1} - v_n)$ est convergente.

(d) En écrivant que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} - v_k = l - v_n.$$

et en précisant toutes les hypothèses du théorème utilisé , montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n} + l + \frac{D}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(D est à déterminer, on pourra admettre si vous le connaissez l'équivalent des restes des séries de Riemman convergentes)

Partie II (Série de fonctions) Dans tout la suite I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in I$, $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $g_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx}$.

2. (a) Montrer que les séries $\sum_{n\geq 1} f_n$ et $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

(b) Déterminer pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x\mapsto 0} f_n(x) = l_n$. Que dire de la série $\sum_{n\geq 1} l_n$? Que peut-on en conclure sur le mode de convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$?

(c) Calculer $\|g_n\|_\infty^{]0,+\infty[}$, que dire de la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 0}$ (mode de convergence). Conclure en précisant le théorème utilisé que $\sum_{n\geq 0} g_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

(d) Pour tout $n \geq 1$, et pour tout $a > 0$ déterminer :

$$\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = \mathrm{Sup}_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x)|.$$

En déduire, en précisant bien le théorème utilisé que $S = \sum_{k=1}^{\infty} f_n$ est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

(On ferait de même pour la série $\sum_{n\geq 0} g_n$).

Parie III (un peu d'intégrale impropre)

(a) Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$..

On admet dans la suite que
$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Pour $x \in]0, +\infty[$, on considère la fonction h_x définie par $h_x(u) = \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ définie sur $]0, +\infty[$.

(b) Quelle est la monotonie de h_x ?

(c) En utilisant une comparaison série intégrale, montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

(d) A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{xt}}\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{xt}}\mathrm{d}t.$$

(e) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$